

數學領域教學研究中心教案 - 乘法公式

教案設計：莊惟棟 老師

協同設計教師：蕭百吟 老師、黃筱崑 老師、郭姿伶 老師

壹、主題

乘法公式

貳、課程領域

- 一、乘法分配律
- 二、和平方公式
- 三、乘法公式

參、授課時間

- 一、數學魔術(15 分鐘)
- 二、圖解分析(15 分鐘)
- 三、收斂問題(15 分鐘)

肆、學習目標

指標 A-8-1

二次式的乘法公式：和平方、差平方、平方差及 $(a + b)(c + d)$ 展開式

伍、課程名稱與學習動機引導

命中註定遇見你

一、效果說明：

1. 請觀眾於一副 52 張撲克牌洗牌後取出 13 張牌
2. 將 13 張牌正反混亂放置，使其有正面有反面
3. 將 13 張牌分成 8 張牌和 5 張牌兩疊
4. 計算兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到 A
5. 計算兩疊牌面為反面的張數，將其相乘得到 B
6. 取剩下的 39 張牌發牌，記住第 $A + B$ 張牌後，將剩餘的牌疊到上方
7. 魔數師把牌拿到背後洗牌
8. 請觀眾挑選 8 張牌或 5 張牌其中一疊，將其整疊牌翻面
9. 計算新的兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到 C
10. 計算新的兩疊牌面為反面的張數，將其相乘得到 D
11. 魔數師對觀眾說：「如果命中註定遇見你，那你將牌發到 $C + D$ 的位置將出現你記住的那張牌！」

註：一切操作及選擇都由觀眾執行，而奇蹟就如此的產生！

二、教學影片 QR：



陸、課程核心討論與準備

一、尋找【命中註定遇見你】關係與規律

訓練學生冷靜觀察、分析題意，藉由魔術課程找出規律，以實際操作的方式思考並進行試算，歸納其數學原理與解題方法。

二、認知【乘法分配律】的存在意義

架構國小基礎，由 $a(c + d)$ 延伸為 $(a + b)(c + d)$ 時，由數字計算進入代數計算，探究列式後展開的能力素養。

三、命中註定的數學魔術效果展現

準備學習單、課本或講義習題，實際提昇計算能力。

四、教學教具

撲克牌(二人一副)

五、評量

1. 基礎評量 - 課本、講義、測驗卷。
2. 密室逃脫 - 刺激有趣的評量測驗。

柒、其他備註及注意事項

一、準備教具

撲克牌：去除鬼牌後共 52 張

二、先備知識

乘法分配律， $a(c + d)$ 的形式練習

教學流程

教學主題		乘法公式	指導教授	蔡宗龍
教學對象		八年級上學期	教學時間	1 節課
教學對象 問題分析		<ol style="list-style-type: none"> 1. 乘法分配律以乘法公式的形式出現，許多學生無法理解各項次相乘的結果，除了數字以外，將採用代數的形式進行精熟理解。 2. 圖像法的切割方式雖然明確，但對於相乘步驟的過程缺乏記憶點，可採用數學魔術撲克牌方式進行計算與操作連結。 		
教材優勢		將整體的教學主軸，以學生可以操作觀察的實境呈現，憑藉手腦並用的實作，輔以引導思路的學習單，從數學的變化中看到不變的規律；人類天生存在的好奇心，從獨力發現的成就、驚奇的探索，整合出列式的思路歷程，進而邁向代數使用的卓越計算能力，最後達成 A-8-1 學習目標。		
設計理念		以數學玩魔術，用魔術學數學；用生活實例、明確易懂的方式，讓孩子瞬間獲得成就感回饋，達到學習心流的目的。		
教學內容分析		魔術(學習動機) → 觀察(思考養成) → 分析(數學能力) → 解決問題(數學評量) <div style="text-align: center;"> <p style="text-align: center;">數學素養</p> </div>		
教學 目標	單元目標	具體施作		
	認知部份 魔數觀察	<ol style="list-style-type: none"> 1. 使用 10 分鐘表演數學魔術。 2. 給學生實作學習單，觀察數字的變化規律。 3. 讓學生依據教師指導步驟操作，進行 5 分鐘撲克實驗。 		
	計算部份 工具使用	<ol style="list-style-type: none"> 1. 藉由魔數觀察，引導核心計算能力。 2. 用圖呈現乘法操作的變化及特性。 		
	操作推理 應用問題	<ol style="list-style-type: none"> 1. 原題型與新創意實際演練，並能進一步解答相關問題。 2. 討論歸納常見應用問題。 		

學習單：學生筆記與自我推理時間

準備	52 張撲克牌，複習基本乘法分配律 $a(b + c) = ab + ac$	
流程	口語表達	操作細節
	洗牌後取出_____張牌，將牌混亂正反混亂放置，使其有正面有反面	讓牌儘量混亂
	將牌分成_____張牌和_____張牌兩疊	推理一：這個分法有什麼特殊意義？
	計算兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到A (_____) × (_____) = _____ 計算兩疊牌面為反面的張數，將其相乘得到B (_____) × (_____) = _____	問題一：A、B 是定值還是隨機？ $A \times B$ 是定值還是隨機？
	取剩下的 39 張牌發牌，記住第 $A + B$ 張牌後，將剩餘的牌疊到上方	一定要用剩下的牌蓋在上面
	魔數師把牌拿到_____洗牌	_____洗牌是關鍵動作 (_____)
	請觀眾挑選其中一疊，將其整疊牌翻面 計算新的兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到C (_____) × (_____) = _____ 計算新的兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到D (_____) × (_____) = _____	問題二：C、D 是定值還是隨機？ $C + D$ 是定值還是隨機？ 問題三：如果翻另一堆有影響結果嗎？
魔數師對觀眾說：「如果命中註定遇見你，那你將牌發到 $C + D$ 的位置將出現你記住的那張牌！」	推理二：如果 $C + D$ 在最後階段是必然結果，那是什麼因素造成的？	

學習單：數學轉化時間與引導

原先	正 3	反 5
正 1	3	
反 4		20

方格中的數字就是觀眾的發牌數

翻轉 1	反 3	正 5
正 1	3	5
反 4	12	20

翻轉 2	正 3	反 5
反 1	3	5
正 4	12	20

原先	正 2	反 6
正 2		
反 3		

翻轉 1	反 2	正 5
正 2		
反 3		

翻轉 2	正 2	反 6
反 2		
正 3		

原先	正 (__)	反 (__)
正 (__)		
反 (__)		

翻轉 1	反 (__)	正 (__)
正 (__)		
反 (__)		

翻轉 2	正 (__)	反 (__)
反 (__)		
正 (__)		

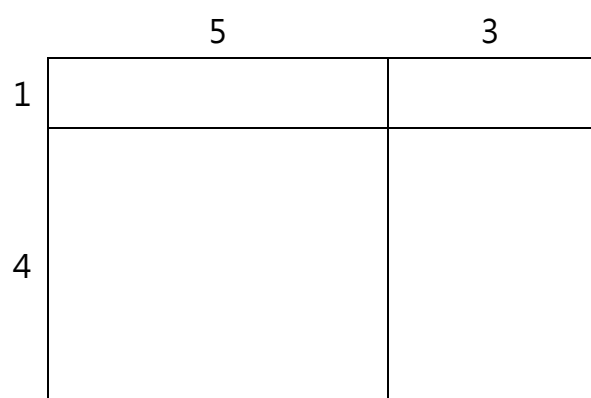
原先	正 (__)	反 (__)
正 (__)		
反 (__)		

翻轉 1	反 (__)	正 (__)
正 (__)		
反 (__)		

翻轉 2	正 (__)	反 (__)
反 (__)		
正 (__)		

依照嘗試魔數操作與觀察，可以發現什麼樣的結論呢？

- 發牌的張數與學習單的四個小區塊有什麼關係？
- 發牌的總張數固定為多少？
- 觀察同學和自己的實驗數據，發牌的總張數來自魔術步驟的哪一個？
- 圖解說明為什麼發牌次數可以找到觀眾的牌：
- 觀察下方長方形的面積，和這個數學魔術有什麼連結？



$$(1 + 4)(5 + 3) =$$

$$(a + b)(c + d) =$$

改變邊長的分配，並不影響面積的大小，發牌張數就是這樣被控制

學習單：學生筆記與自我推理時間

準備	52 張撲克牌，複習基本乘法分配律 $a(b + c) = ab + ac$	
流程	口語表達	操作細節
	洗牌後取出_____張牌，將牌混亂正反混亂放置，使其有正面有反面	讓牌儘量混亂
	將牌分成_____張牌和_____張牌兩疊	推理一：這個分法有什麼特殊意義？
	計算兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到A (_____) × (_____) = _____ 計算兩疊牌面為反面的張數，將其相乘得到B (_____) × (_____) = _____	問題一：A、B是定值還是隨機？ $A \times B$ 是定值還是隨機？
	取剩下的 39 張牌發牌，記住第A + B張牌後，將剩餘的牌疊到上方	一定要用剩下的牌蓋在上面
	魔數師把牌拿到_____洗牌	_____洗牌是關鍵動作 (_____)
	請觀眾挑選其中一疊，將其整疊牌翻面 計算新的兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到C (_____) × (_____) = _____ 計算新的兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到D (_____) × (_____) = _____	問題二：C、D是定值還是隨機？ $C + D$ 是定值還是隨機？ 問題三：如果翻另一疊會影響結果嗎？
	魔數師對觀眾說：「如果命中註定遇見你，那你將牌發到C + D的位置將出現你記住的那張牌！」	推理二：如果C + D在最後階段是必然結果，那是什麼因素造成的？

學習單：數學轉化時間與引導

原先	正 3	反 5
正 1	3	
反 4		20

方格中的數字就是觀眾的發牌數

翻轉 1	反 3	正 5
正 1	3	5
反 4	12	20

翻轉 2	正 3	反 5
反 1	3	5
正 4	12	20

原先	正 2	反 6
正 2		
反 3		

翻轉 1	反 2	正 5
正 2		
反 3		

翻轉 2	正 2	反 6
反 2		
正 3		

原先	正 (__)	反 (__)
正 (__)		
反 (__)		

翻轉 1	反 (__)	正 (__)
正 (__)		
反 (__)		

翻轉 2	正 (__)	反 (__)
反 (__)		
正 (__)		

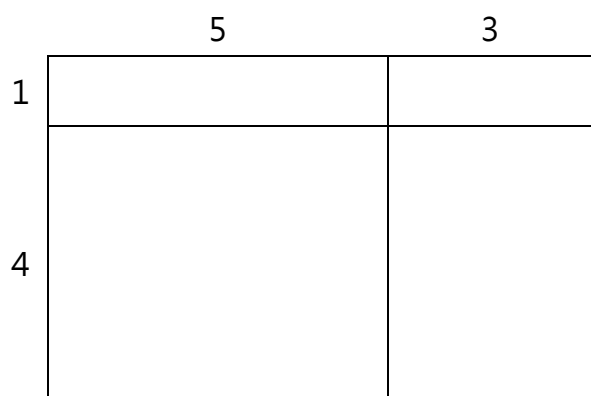
原先	正 (__)	反 (__)
正 (__)		
反 (__)		

翻轉 1	反 (__)	正 (__)
正 (__)		
反 (__)		

翻轉 2	正 (__)	反 (__)
反 (__)		
正 (__)		

依照嘗試魔數操作與觀察，可以發現什麼樣的結論呢？

- 發牌的張數與學習單的四個小區塊有什麼關係？
- 發牌的總張數固定為多少？
- 觀察同學和自己的實驗數據，發牌的總張數來自魔術步驟的哪一個？
- 圖解說明為什麼發牌次數可以找到觀眾的牌：
- 觀察下方長方形的面積，和這個數學魔術有什麼連結？



$$(1 + 4)(5 + 3) =$$
$$(a + b)(c + d) =$$

改變邊長的分配，並不影響總面積的大小，發牌張數就是這樣被控制的

教師版操作流程

準備	52 張撲克牌，複習基本乘法分配律 $a(b + c) = ab + ac$	
流程	口語表達	操作細節
	洗牌後取出 13 張牌，將牌混亂正反混亂放置，使其有正面有反面	讓牌儘量混亂
	將牌分成 8 張牌和 5 張牌兩疊	推理一：這個分法有什麼特殊意義？
	計算兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到A () × () = _____ 計算兩疊牌面為反面的張數，將其相乘得到B () × () = _____	問題一：A、B是定值還是隨機？ $A \times B$ 是定值還是隨機？
	取剩下的 39 張牌發牌，記住第A + B張牌後，將剩餘的牌疊到上方	一定要用剩下的牌蓋在上面
	魔數師把牌拿到 背後 洗牌	背後 洗牌是關鍵動作 (實際上沒有洗)
	請觀眾挑選其中一疊，將其整疊牌翻面 計算新的兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到C () × () = _____ 計算新的兩疊牌面為正面的張數，將其相乘得到D () × () = _____	問題二：C、D是定值還是隨機？ $C + D$ 是定值還是隨機？ 問題三：如果翻另一疊會影響結果嗎？
魔數師對觀眾說：「如果命中註定遇見你，那你將牌發到C + D的位置將出現你記住的那張牌！」	推理二：如果C + D在最後階段是必然結果，那是什麼因素造成的？	

原先	正 3	反 5
正 1	3	
反 4		20

方格中的數字就是觀眾的發牌數

翻轉 1	反 3	正 5
正 1	3	5
反 4	12	20

翻轉 2	正 3	反 5
反 1	3	5
正 4	12	20

原先	正 2	反 6
正 2	4	
反 3		18

翻轉 1	反 2	正 5
正 2	4	12
反 3	6	18

翻轉 2	正 2	反 6
反 2	4	12
正 3	6	18

依照嘗試魔數操作與觀察，可以發現什麼樣的結論呢？

- 發牌的張數與學習單的四個小區塊有什麼關係？

四個小區塊的總和就是發牌的總張數

- 發牌的總張數固定為多少？

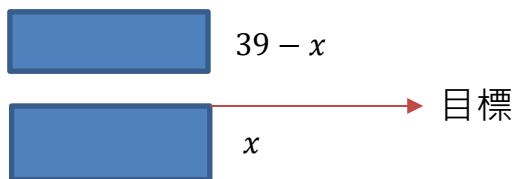
40

- 觀察同學和自己的實驗數據，發牌的總張數來自魔術步驟的哪一個？

『將牌分成 8 張牌和 5 張牌兩疊』這個步驟

- 圖解說明為什麼發牌次數可以找到觀眾的牌：

假設觀眾第一次發 x 張，將剩餘的牌蓋上去時，蓋了 $39 - x$ 張，因此觀眾的牌最後落在 $39 - x + 1$ 張，若要觀眾再發到那個位置，觀眾總共發牌 $x + 40 - x = 40$



- 觀察下方長方形的面積，和這個數學魔術有什麼連結？

	5	3
1	5	3
4	20	12

$$(1 + 4)(5 + 3) = 5 + 3 + 20 + 12 = 40$$
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

改變邊長的分配，並不影響總面積的大小，發牌張數就是這樣被控制的