陳玉芬、單維彰（2021）。
符號語言學作為數學的教學進路初探—以負數的概念模型譬喻為例。
臺灣數學教師，**42**（1），1-16
doi: 10.6610/TJMT.202104_42(1).0001

符號語言學作為數學的教學進路初探—以負數的概念模型譬喻為例

陳玉芬[1]　單維彰[2]
[1]國立中央大學學習與教學研究所
[2]國立中央大學師資培育中心

符號語言學（semiotics）對負數的學習相當具有可借鑑之處。就像「快樂樂音」與「$3-(-2)$」都有著讀音與意義上的困擾；又像語言的學習常使用重覆性替換，以習得語彙的意義，對照於負數的學習常進行程序性操作，以強化概念的習得；或者像語言學習者須觀察單字在前後文脈絡中的位置，以解讀該字的適當意義，對照於負數加減的初學者必須從算式中解讀「$-$」號的正確意涵，以執行正確的程序。此外，負數在生活情境中提出的「正反」或「上下」等比喻，常忽略了負數本身的符號特質，如「負號」的單元運算意涵，相對於「減號」的二元運算意涵，是兩種本質不同的概念。本文參照符號語言「在組合關係與聚合關係中強調脈絡關連性」的學習特性，發現負數的符號表徵與符號語言有著思維上的類比性，並認為藉由結構性的「概念模型」譬喻，可作為從直觀數學到形式數學的過渡橋樑，促進學習者建立數學結構與形式意義之間的關連性，進而讓學習者能夠具體理解負數。這是一項探索性研究（exploratory research），意圖闡明負數在數學思維中的複雜性和概念的豐富性，同時藉由「概念模型」譬喻分析負數相關的教與學。

關鍵詞：負數、符號語言學、概念模型、譬喻

通訊作者：單維彰，e-mail：shann@math.ncu.edu.tw
收稿：2020 年 11 月 27 日；接受刊登：2021 年 2 月 17 日。

壹、前言

語言溝通是每個人皆具備的生活能力。以英語為例，它是一種國際上通用的自然語言，而數學是一種精確描述數量形的人造語言。雖然二者都可「視」為一種語言，但它們卻是二種完全不同的學科語言（Leshem & Markovits, 2013）。前者是自然語言，它會因為國家、地域、種族的不同而有所不同，但學習者只要身處其境，有著相同社會脈絡，就能自然地習得該種語言（Li & Wang, 2013）。後者是人造語言，它是由人類刻意發展出來的，因為要與跨文化的他人溝通，而且還有特定的功能目的，所以它強調形式、邏輯與精準。這些特質使得數學語言相對濃縮與精練，甚至每一組符號句式都有更深層的意義。這就是數學本身給予的數學語言障礙，也是造成部分數學學習者的學習障礙。顯然在數學這門 「語言」上，許多人是較無法與生俱備「語感」又能與他人溝通無礙的。縱然如此，英語、數學二者之間仍存在著語言、文化、思維等不同形式的直接關係（Li & Wang, 2013; Whorf, 1956），例如 Whorf 認為語言不是只有字詞和發音的集合，它可透過字詞的字尾組合關係，歸納不同形式的發音模式；類似地，算式中的「$-$」號，隨著位置不同，其讀音與運算的意義亦皆不同，如「$-2-3$」。Li 與 Wang 也指出人類大腦探索這二種語言之間的傳遞方式，其關鍵在於兩種語言的思維模式（thinking pattern）具有相似性，也就是說這兩種語言皆使用概念結構來處理所接收的語言訊息。

自然語言的特徵之一，就是經過時間長河的蘊釀，它們都是在所處的社會環境脈絡與不同時空交織所發展出來的語言。有其特定性，比方說，英語、法語、華語等。但縱然語言有所不同，瑞士語言學家索緒爾（Ferdinand de Saussure, 1857-1913）認為各種語言系統內的各個元素彼此的關連性是相通的。他以橫向的組合關係（syntagmatic relation）與縱向的聚合關係（paradigmatic relation）說明語言學習的關連性。所謂橫向的組合關係是指對語意的了解，可從前後語境（co-text）確立語感的正確度，另一個縱向的聚合關係可以用來確認語法使用的正確度。索緒爾認為語言的學習在某種程度上是從一起出現的元素中覺察其產生的意義。就好像一個交通號誌紅燈亮起，所有的用路人都知道要停下，這時紅燈不只是一個符號的形式，同時更賦予了要停下的意義。所以索緒爾認為，要理解一種語言，不僅僅是把它視為一種形式，更要能捕捉那形式與意義之間的關連。

若用語言理論來理解數學語言，則它的語言是符號、概念、定義以及定理，我們可以說它是一種世界的共同語言。正因為是共通的語言，所以它需要有著大家可以共同遵循的規範或共同認可的表達方式，因此它需要刻意學習。Hiebert 與 Carpenter（1992）

認為：理解數學就是理解數學脈絡下所使用的數學符號語言。而維高斯基（Vygotsky, 1896-1934）的符號學習理論，其核心思想正是符號語言學（semiotics）與中介（mediation）的概念，Albert、Corea 與 Macadino（2012）更認為維高斯基的符號學習理論非常適用於詮釋數學的學習情境，因為數學的概念形成過程不可或缺的一部分就是涉及符號（symbol）的使用，如數學符號 $x, f(x)$ ，它們都是傳達概念的符號。理解數學知識就是能夠獲得這些知識的內在表徵，而這些有結構性的內在表徵需要透過外部表徵連結而習得。所以不論語言學習或數學學習，所強調的就是概念本身的關連性，才能讓習得的概念根深蒂固。

「負數」是學生邁入國中學習階段遇到的第一個新檻（Fuadiah, Suryadi & Turmudi, 2017），負號亦是七年級階段要學習的新符號。國內教科書中負數教學順序通常是：認識負數在生活上的應用，諸如氣溫、方向或進退等二分法概念；然後有相反數、數線概念進入數的大小比較；接著就是正、負數的四則運算（洪有情，2020；陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛，2005）。負數教學研究也有很多都是嘗試將負數歸因於某種有意義性的行為，以解決負數的合理性問題（Altiparmak & Özdoan, 2010）。然而學生在學習負數時，還需要調適由自然數擴充到含負整數、負分數、負小數等更大範圍的數的概念學習（林保平，2005；Altiparmak & Özdoan, 2010）。「$-$」號本身同時具備兩種概念，即「負號」的單元運算（unary operation）概念，以及「減號」的二元運算（binary operation）概念（Vlassis, 2004; Vlassis, 2008; Bofferding, 2014）。例如「-2」讀作負二，此時的「$-$」號是負號，它指涉的是-2的屬性：包括它小於 0，在數線的位置落於原點的左側二單位長處；負號也是單元運算符號，表達-2與 2 的「相反義」，此概念具有幾種心相（亦即「譬喻」的方式），包括它們在數線上彼此對稱於原點（symmetry），或者它們彼此是對原點的鏡射（indication of inversion）。相對而言，「$2-3$」讀作二減三，此時的「$-$」號是減號，它指涉的是從第一個運算元 2 扣除（下降）第二個運算元 3。

本文的目的即在於透過對「符號語言」學習的理解與掌握，運用「符號語言」學習中的聚合關係與組合關係的脈絡關連性，連結負數的多元性概念，並以「概念模型」譬喻進行負數的策略性教學，提出學習「負數」時相關的概念思維，以及一個可以呈現學習者對於負數概念具體理解的方法。

貳、 文獻探討

一、符號語言學

衛友賢（Wible, 2005）對於瑞士語言學家索緒爾（Ferdinand de Saussure, 1857-1913）將語言視為一種關連性的系統，有著完整的描述，茲引用於下（Wible, 2005, p. 29／陳玉芬、單維彰譯）：

> 索緒爾以其深刻的想法，給幽微難解的抽象化語言概念—朗格（langue）—提供一套可理解的說明。朗格不將語言視為字詞和發音的集合，而將它視為關係的系統。朗格是結構主義的語言觀點，此觀點認為語言是一個系統，在此系統中，每個元素只能透過它與包含它的更大結構內之其他元素的關係而獲得理解。索緒爾主張這個範圍更廣闊的符號系統理應成為獨立的研究對象，而他稱此研究領域為符號學（semiology）。他隨後認為語言學（linguistics）作為一種特殊符號系統的研究，理應被視為符號學的一個次領域。

這說明索緒爾認為語言是一種結構系統，在人們意識深處的語言結構，共通於所有人類使用的語言，不管他所用的是哪一種語言。在語言系統之中，各個符號指示（sign）是相互關連並具有意義，而意義必須要有共識，這就是一種認知層面。Wible（2005）認為索緒爾的符號不是指某事或某物，它是形式（form）與意義（meaning）之間的一種關係。索緒爾將符號分成二個概念：符號具（signifier）以及符號徵（signified），如圖 1。圖 1 的上層是具體的，或是可聽到、可看到的信號，又稱為所指物（signifier），例如字符「犬」或它語音；圖 1 的下層是所指物的心靈意象或意義（signified），而這是一個抽象的概念，例如「狗」的意象或概念。所謂的「符號指示」正是這二者之間的一種關連性，一旦產生聯結就不會分開了。這樣的關係強調的是語言的學習著重在符號與抽象之間的「關連性」。即應辨識此符號指示所具備的意義，而此意義要形成共識才能交流，也才能繼續學習進而提升認知層面，這是語言本身具有的結構性。

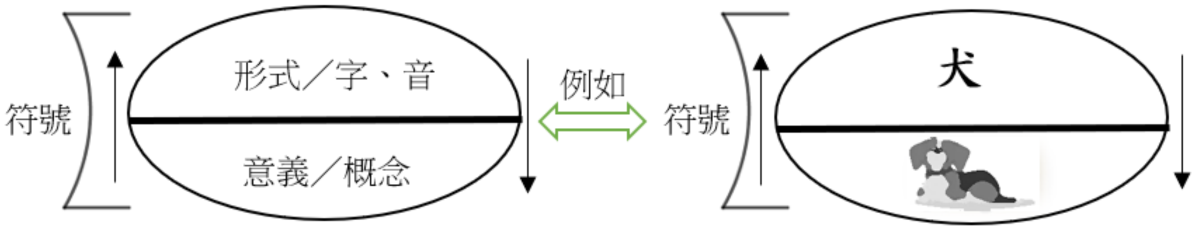

圖 1　符號（sign）的形式與意義關連性

接著，索緒爾提出應該如何學習一種語言的方法。他認為語言中抽象層次的概念學習是極其複雜的，他以二種具體的面向，分別是橫向的組合關係，與縱向的聚合關係來做說明（林信華，1999）。所謂橫向的組合關係是指對語意的了解，可以從前後語境（co-text）確立語感的正確度。因為索緒爾認為一個單詞的意義，在某種程度上是從與單詞一起出現的元素中衍生出來的，它們可以靠著彼此的出現覺察其產生的意義；也就是說這符號的排列順序是有意義的，或者說這符號的意義是與其他相關符號的前後關連所產生的。例如，僅看「－」符號並不能決定它的意義，但是將它放在「3－2」或「−2」的排列裡，就有明確的意義了。Cruse（1986）也提到，一個詞彙的意義都應在適當的脈絡且符合語法的語義情境中來解讀。對應到負數的學習過程，小學剛畢業的學生看到「3－2」就像「狗吠火車」那樣地自然，可是「2－3」就像「火車吠狗」那樣地唐突。

索緒爾提出的另一個面向則是縱向的聚合關係，它可以用來確認語法的正確度。例如將「3－（－2）」的第一個符號「－」換成「＋、×、÷」都是合法的，可是第二個符號「－」卻只能換成「＋」而不能換成「×、÷」。而語言學習即在於語言特質上尋找符號或樣式之間關連性，在學習策略上強調語境（橫向脈絡）及語法（縱向脈絡）的雙向脈絡。

此外 Whorf（1956）亦認為在英語的字彙學習中，應透過觀察 cat、lip 或 pig、lamb 或 noise、horse 等這些字尾發音是有聲或無聲，進而去理解為何字尾加上 s 後的讀音會轉成不同的 s 或 z 或 iz，甚至像 leaf、wife 字尾加上 s 要變形。此即所謂的「樣式符號表示式（pattern-symbolic expressions）」，說明語言的學習，也是要透過觀察、分析與演繹。對應到負數的學習，就是提倡以觀察實境中的大量的例子當作學習的起點，而不鼓勵以定義和規則、公式當作學習的進路。

除此之外，索緒爾亦認為符號具有「任意性」（arbitrary），就好比「玫瑰不叫玫瑰，依然芬芳」。同樣地，在我們約定俗成地學習使用一個「－」號代表數學上的負號時，它只是作為溝通的符號，然而當我們使用「負號」或「減號」來指稱某個概念意義時，它是具有一些我們能指認的必要特性。

總結而言，語言符號雖然不等於數學，但的確與數學的學習方式有相似之處，值得用來作為數學教學進路的參照。

二、數學的符號語言學習

維高斯基（1962）認為符號語言學就是「符號指示」或其他工具在溝通過程中的一

種研究。Albert 等人（2012）亦指出，整合一個概念形成的過程，包含許多「符號指示」的使用，其目的就是為了模擬人類內在思維的行為，然後形成人腦中一個新的對應聯結（Ghassemzadeh, 2005）。其具體陳述如下（Albert et al., 2012, p.7／陳玉芬、單維彰譯）：

> 人們藉由「符號指示」導引與控制其思維運作的大方向，並藉此引出問題的解決方案。一開始，符號的角色僅是與其他人產生外在社會聯結的媒介，也就是作用於人與人之間的心理互動。然而，到了後來「符號指示」成為影響自我思維活動的媒介。

也就是說我們可以透過「符號指示」的譬喻，理解內在的思維，甚至形成不可逆的抽象概念，也就是維高斯基所指產生質變功能。

維高斯基認為人類心智在學習過程中的改變，是可以觀察的。Albert 等人（2012）即以此理論對照於數學的學習，並舉幼童學習為例：即使幼童已能數數 1、2、3、…、10，這樣的行為表現也許是透過模仿，並不表示他們已學會「數」的概念；但是當他們對著某些對象能夠依序數數並正確回答數量時，則顯示他們理解了數的有序性與量的概念，也就表示習得「數」的關係性了，此時才表示他們學會了「數」的概念。就好像在負數的學習過程中，學習者總能將「負負得正」琅琅上口，此表現也許源自於模仿，未必表示真正理解負號的關係性，所以才會發生類似 $(-3)+(-5)=(+8)$ 的謬誤。

這也正是使用「符號指示」表徵來彰顯智能發展樣貌的契機：因為我們無法控制或看見個人的智能，所以透過這些譬喻的表徵，讓思維被看見。維高斯基（Vygotsky, 1978）認為當個人使用推論的工具傳達他自己的內在想法時，其「符號指示」是有所譬喻的，他認為透過具體的工具表徵所傳達的意義，可以映射其內心的思維。這與索緒爾認為如何理解一種語言的理論是不謀而合的，兩者皆認為概念的形成不能僅僅被視為一種形式，更要能捕捉那形式與意義之間的關連。亦如 Skemp（1976）在闡述的形式與意義之間的關連性中，引入「關係性理解」此術語。他認為關係性理解就是一種質性觀察，它是可以促進自我成長的有機體，就像一棵延伸其根的樹木，可以探索新的領域並尋找營養。

借用語言之類比的數學學習理論，還有 Hiebert 與 Lefevre（1986）認為數學知識可分為程序性知識（procedural knowledge）與概念性知識（conceptual knowledge），且「概念知識的每一個單位，絕不可能是孤立的資訊片段」（洪萬生，2003）。此論述與 Skemp（1976）闡述的形式與意義之間的關連性亦是不謀而合的，說明數學概念的學習實應著重於概念間的關連性。

綜合上述，透過對語言的認識，再對照於數學自身精簡語言的特質，可以理解在數學學習時，不論是為了表達從學習活動中發展出的新概念而引進的新符號，或是擴充舊符號的意義使其延伸至新的概念，或是為舊符號釐清過去不需分辨的概念差異，識別文本脈絡及發展適當概念的連結譬喻，都有助於對此數學主題的理解。

三、「概念模型」譬喻表徵

「模型」（model）是數學教育中常常使用的一個術語，它被荷蘭的真實數學教育（realistic mathematics eduction，簡稱 RME）詮釋為：「模型在真實或可想像之真實、非形式理解、系統性的形式理解之間，扮演橋樑的角色」（van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.13／陳玉芬、單維彰譯）。本文所指的「概念模型」是作為抽象數學概念之表徵的具體物或可想像的物件。例如直尺是正數的概念模型，數線是將正數與負數整合在一起的概念模型。而「譬喻」（metaphor）則是在模型上對應抽象概念所做的具體描述（Ernest, 2010）。此外，當我們在數線上標示負數時，數線僅為概念模型，但是當我們使用數線上的移動作為加減運算的譬喻時，或者當我們使用 3 與 −3 在數線上對稱於 0 的關係作為「相反數」之譬喻時，數線本身也成為一種譬喻。

Lakoff 與 Núñez（2000）認為譬喻涉及兩個領域：「來源域」（source domain）和「目標域」（target domain），如圖 2。Lakoff 與 Johnson（2003／周世箴譯，2006）認為在符號語言學習中，隱喻就是一種思維現象，是指通過一個事物來理解和體驗另一個事物，是一個從來源域到目標域的映射，亦即在原有意義的基礎上通過隱喻思維獲取不同的擴展意義。也可以說譬喻是詮釋一種符號或模型與概念之間的相關性，使之與個人內在無法看見的思維做連結。

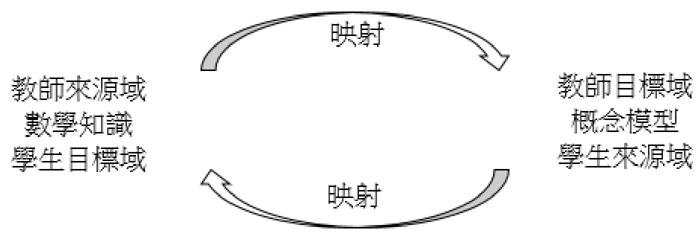

圖 2　教師與學生運用譬喻的相對性

以「$2-(-3)$」的算式為例來說明，因為教師已經具備負數運算的知識，所以「$2-(-3)=2+3=5$」即為教師的數學知識來源域；當她／他企圖為此運算設計一套譬喻，

用來幫助學生理解此運算程序，這套譬喻就是她／他的目標域。假設教師的設計是將「$2-(-3)$」譬喻為「從數線上 2 的位置朝箭頭的反方向（即向左）後退 3 格」，則此譬喻式的行動規則，成為學生所接收的訊息，而它成為學生學習負數運算的來源域。根據此來源域，學生得知運算結果是 5，但是學習的目標並非習得那一套譬喻，而是透過譬喻而最終理解「$2-(-3)=2+3=5$」，所以它就是學生的目標域。值得注意的是，學生透過譬喻之來源域獲致的理解（也就是學生的目標域），未必等同於教師的來源域（假設那是正確知識）。所以教師要設計活動，讓學生有機會再透過譬喻而作更多往返映射的表達；如此的循環表徵，即可檢視其教學譬喻是否有效。Kilhamn（2011）認為，如果來源域與目標域之間的映射關係無法形成，譬喻就不存在。

Damerow（2007）亦提出透過「來源域」和「目標域」的譬喻教學，可以讓思維看得見，並將此種譬喻表徵分成二個不同層次，第一層次就是操作一種藉由符號或是轉換規則組成的模型的具體物件，使之可作為表徵真實的抽象物件行為。最基本的形式就是具體物的識別（identification），比如透過使用詞彙或符號指示進行命名活動，其至做分類。又如在「數數」方面，是可以利用具體物與實際的真實數字概念作一一對映。像伸出手指數到 5（符號或文字），那麼手指就是具體的真實物件，它對應到 5 這個表徵的抽象物件。亦即他們用數數到 5（真實的動作）與手指（真實物件）將 5（抽象的物件）連結了。再來觀察 $5+2=7$ 此式子，因為仍只是將手指數相加，所以它仍屬於第一層次表徵，將之對照於負數教學，在數線上做前進或後退的動作，相當於以具體物與負數的加減法做譬喻，所以負數的加或減的概念屬於第一層次表徵。或是 $-(3)=-3$、$-(-3)=3$、$+(-3)=-3$ 或 $-(+3)=-3$ 等的反轉指示，都可透過數線操作（真實動作）及「負即相反」口訣完成負號化簡的性質，都屬於第一層的表徵理解後的抽象物件。

第二層次（或更高階）則是以「心智模型」（mental models）的譬喻來表徵。它們也是由符號或由符號和轉換規則組成的模型所組成，然而此「心智模型」則是透過自己的想法並針對真實物件作抽象思考後，表徵出個人的反思抽象思維。舉例來說，針對 5 這個數字本身的特質描述，比方說：$\sqrt{5}$、5^2、-5 等，則屬於後設認知本質的抽象物件（$\sqrt{5}$、5^2、-5）與抽象物件 5 的連結，因為此時的 5 並未具有數手指的意義，所以說已經從另一個數學物件及想法中抽離而建立新的知識概念結構，此為具有第二層次表徵能力。同樣的以負號「$-$」為例，$2-(-3)=2+3=5$ 的減法運算，若是仍在數線上操作，則仍為第一層次表達，若是建立在內心思維的運作而不是數線上的操作，則屬於第二層後設認知的抽象物件連結，而$-(a)=-a$、$-(-a)=a$ 的抽象操作亦然。

也就是說，第一層次與第二層次表徵的最大不同，在於模型譬喻表徵的不同。前者利用具體物表徵內在的抽象思維，後者則利用抽象模型表徵所對應的後設認知的抽象思維。所以，一個物件若是透過具體物操作，進而連結至抽象概念屬於第一層次表徵；若是透過比較、對應、組合與重覆的反思動作所建構，或數學的證明、數學的結構以及形式化邏輯數學概念都屬於第二層次的後設認知抽象物件。

參、 負數之「概念模型」譬喻舉例

本文指涉的「概念模型」即為一種表徵，也是溝通工具，用來作為由具體物轉化至抽象概念間的橋樑。在此模型上執行的活動，以及活動後獲致的理解，若與學習目標知識有所關連或對應，則是一組譬喻。以負數的教學為例，本文欲以數線上（相對於原點）的對稱關係，以及數線上的前後移動，並搭配「負」與「相反」在詞語經驗上的類比性，作為初學者建立負數及其運算知識的一組「概念模型」譬喻。前文已經在圖 2 之後略述此概念模型，此處將其整理於表 1。

表 1

負數知識與概念模型之「譬喻」舉例對照表

教師來源域（數學知識）／學生目標域	教師目標域（概念模型）／學生來源域
加（＋）號	二元運算／朝數線箭頭方向前進或後退
減（－）號	二元運算／朝數線箭頭相反方向前進或後退
正（＋）號／性質符號可省略	性質符號（正的）／前進（順指示方向）
負（－）號	性質符號（負的）／後退(逆指示方向)
「朝向數線箭頭方向前進」	加一正數，如：$2+3=5$
「朝向數線箭頭方向後退」	加一負數，如：$2+(-3)=-1$
「朝向數線箭頭相反方向前進」	減一正數，如：$2-3=-1$
「朝向數線箭頭相反方向後退」	減一負數，如：$2-(-3)=5$
「負」非「減」	單元運算與二元運算之間概念的差異。 如：$-2-3$可以正確讀出「負 2 減 3」
「負」就是「相反」	能理解有反轉的指示，如：$-(-3)=3$
「減」是「加相反」	完成二元運算的化簡， 如：$2-(-3)=2+3=5$

在學習負數概念時，對於「負」的詮釋是學生重要的認知發展。在我國課程中，初學負數的 7 年級學生，抽象思維能力尚未強健，但日常語言經驗已經相當豐富，因此本研究試圖以語言的類比作為設計譬喻的主要方法。例如「『負』即『相反』」就是一種話語的譬喻，用來提醒學生，當「$-$」號的讀音是「負」時，它就具有將某種性質做「相反」或「反轉」的功能。

最基本的譬喻式教學例子是負數在數線上的位置，此處強調的是學習者可以應用既有的「相反」經驗，以類比的方式理解一個新概念，如圖 3。

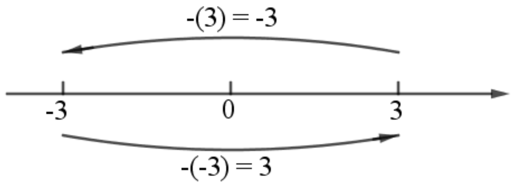

圖 3　說明「負」就是「相反」的概念譬喻

借鑑於符號語言的抽象概念學習方式，可應用橫向的「組合關係」與縱向的「聚合關係」，作為負數教學的策略。舉例而言，運用縱向語法結構的替換進行程序性操作，如圖 4，可確認新概念的習得，並藉由觀察歸納進行負號化簡。

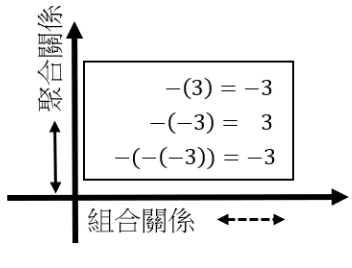

圖 4　負號單元運算的聚合關係舉例

此外在負數教學中，「$-$」號也具有二元運算的概念，如同符號語言中的多義詞必須透過語境中的脈絡與形式連結。比方說，「$3-(-2)$」其讀音的不同，即連結著「$-$」號概念上的差異。如圖 5 中的 ① 式讀作三減負二，但是 ② 式卻讀作負三減二，透過這樣的語境察覺「$-$」號的不同意義，它不僅是一種書寫的語言，也是溝通的語言。當書寫的「$-$」號讀作「負」時，它是性質符號，讀作「減」時，即轉換為運算符號，因此有「『負』非『減』」的提示語，即用來提示這兩種不同的概念。透過橫向的語境脈絡組合關係，說明在符號語言的學習中可作為提供另一類型的脈絡學習。

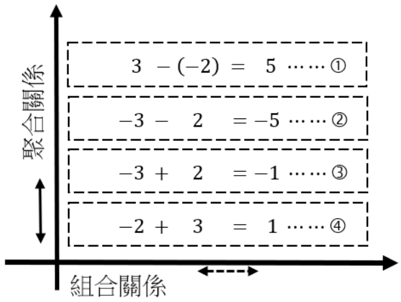

圖 5　負號二元運算的組合關係舉例

接著，圖 5 中 ③ 式的 $-3+2$ 與 ④ 式的 $-2+3$ ，雖然數字互換，非但其值不同，同時牽涉有號數的交換律。正如同前文所提「狗吠火車」與「火車吠狗」其情境脈絡上的合理或荒謬性。像這些的橫向組合（聚合關係）不僅呼應其自然情境脈絡，而這些「概念模型」譬喻，更是維高斯基提出的「中介概念」，他認為「中介概念」是形成概念的不可或缺的過程。

數學語言之所以複雜，部份原因是因為除了在符號閱讀上造成障礙之外，數學本身的性質，亦有其特殊性（Larsen, 2012）。在本研究中，將「減」譬喻為朝向數線箭頭的相反方向（參見表 1），「正」譬喻為前進，「負」譬喻為倒退。例如 $-1-2$ 就是從 -1 的位置開始，朝向數線箭頭的相反方向前進 2 格，到達 -3 的位置，連結$-1-2=-3$ 的抽象概念，如圖 6（左）；而 $-3-(-3)$ 則是從 -3 的位置，朝向數線箭頭的相反方向後退 3 格，到達 0 的位置，連結 $-3-(-3)=0$ 的抽象概念，如圖 6（右）。

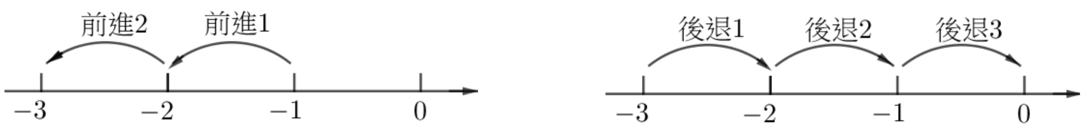

圖 6　「減」與「正」、「負」在數線上移動的譬喻

正如同 Usiskin（2015）所指出知識理解概念是一種多元性維度的理解，當負數的二元運算表徵為 $3-(-2)$ 時，除了在數線上的譬喻之外，它必須發展某種字詞（word）或話語（discourse）或物件來描述「負數」的複雜關係，以進行抽象代數的運算。此時使用「『減』是『加相反』」的譬喻，使得$3-(-2)=3+2=5$，使其同化至舊經驗上，進而讓這些字詞可以影響他們對「負數」理解的變化。

而這樣的概念模型譬喻，在負數教學過程中亦可透過數線觀察，提供學習者反思「比

0 還小的數」的存在性，而圖 7 的數線模式可作為一種進階表徵，代表了正負數是由左至右有序的遞增，且自起點 0 開始分割為正數與負數，這也恰當表徵了 0 作為中性數的特性。

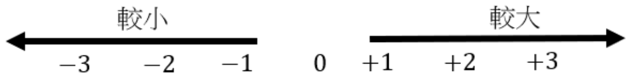

圖 7　連續數線及中性數 0 的說明

此外，在這樣的譬喻中，可以提出對於 0 的二種數學結構關連性。其一，0 是絕對的，因為在 0 以下的數絕對是負的；其二，0 是相對的，因為可以數線任一點做為起點 0，且具有二個相反的方向。而透過 $0-(-3)$ ，觀察學習者是否可以理解就是 $0+3=+3$，這可以說明學習者是否已從具體操作（減相反數就是加），提升至抽象思維進而理解 0 的存在與負數之間的大小關係。這些教學策略都是可運用樣式規律的觀察理解其間的關連性。

肆、 結論

負數學習不僅針對其負號情境描述學習，學生若仍未意識負數與自然數間的差異，或是未理解負數已是一種擴張的／人為的觀念與工具，那麼其思考層次仍將停留在自然數的概念。概念性的高層次思考是有必要教學的，本文的探討焦點即在符號語言的認識下，強調負數的知識關連性概念。

以負數為例，可以討論的關連性有三。其一是單元運算符號的概念，即「負號」代表的是此數字本身的性質符號，含有相反的意義，例如 $-(-3)=3$ 不過就是「相反再相反就還原」，亦好像「以 0 為中心，從 3 的位置鏡射再鏡射」就又回到原來的位置。

其二是透過「『負』非『減』」的提示語，強化二元運算符號的概念，即加是朝向數線箭頭方向前進或後退，而減是朝向數線箭頭相反方向前進或後退，此二者概念是奠基於正數加減法的舊經驗上。而數的正負屬性（性質符號）則透過正負對稱性指示進入整數的擴張，因此在負數的算式化簡時，則以「『減』是『加相反』」的譬喻，讓學習者開始進行抽象性連結的運算學習。

其三是「負的相反義（反轉指示）」，亦即任一個負號的數都在該數的相反位置，在此關連概念中，更能在數線上具體理解比 0 小的數存在性；亦能將 0 為中性數的性質

概念化，甚至可以抽象至任何一個點皆可做為一個起始點，並找出任一數的相對位置。這樣的數學結構性概念一旦形成，它就如許多建構數學思想的積木（block）一樣可以堆疊而上，那麼當我們形成這樣的瞬間跳躍時，就表示已從操作性概念遷移到結構性概念，而這樣的跳躍一旦形成，即代表知識已往上積累，而且可望長期保留。

本研究旨在運用譬喻層次的學習即話語（discourse）的轉化，說明善用符號語言的特性，讓負數性質對應自然語言（中文）的譬喻，作為從直觀數學到形式數學的過渡，並提供學習者以話語表達數學概念的學習情境。透過概念模型的譬喻，期望協助學習者理解並內化數學的結構，以此提供負數教學的另一種策略，也作為未來進行實徵研究之理論基礎。

誌謝

感謝兩位審查委員的建設性意見，使本文大幅聚焦。本研究受科技部 109 年度專題研究計畫「數學識讀文本研究—以發展七年級的閱讀文本策略為例」補助（MOST 109-2511-H-008-002）。

參考文獻

洪有情編（2020）。**國中數學第一冊**。臺北市：康軒。

林保平（2005）。正負數的概念及其加減運算。**科學教育月刊**，第 277 期，頁 10-22。 doi: 10.6216/SEM.200504_(277).0002

林信華（1999）。**符號與社會**。臺北市：唐山。

洪萬生（2003）。數學與文化的交流與程序性知識。收入李弘祺（編），**理性、學術與道德的知識傳統**（頁 1-48）。臺北市：喜馬拉雅研究發展基金會。

陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛（2005）。中小學數學科課程綱要評估與發展研究。臺北市：教育部

Lakoff, G. (2006)。**我們賴以生存的譬喻**（*Metaphors We Live By*; 周世箴譯）。臺北市：聯經。（原著出版於 2003 年）

Albert, L. R., Corea, D., & Macadino, V. (2012). *Rhetorical ways of thinking: Vygotskian theory and mathematical learning*. Dordrecht: Springer.

Altiparmak, K. & Özdoan, E. (2010). A study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(1), 31-47. doi: 10.1080/00207390903189179

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(2), 194-245. doi:10.5951/jresematheduc.45.2.0194

Cruse, D. A. (Ed.) (1986). *Lexical semantics*. Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/S0022226700011622

Damerow, P. (2007). The material culture of calculation. In U. Gellert & E. Jablonka (Eds.), *Mathematisation and demathematisation: Social, political and philosophical ramifications* (pp. 19-56). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. doi: 10.1163/9789460911439_003

Ernest, P. (2010). Mathematics and metaphor. *Complicity*, 7(1), 98–104. doi: 10.29173/cmplct8844.

Fuadiah, N. F., Suryadi, D., & Turmudi, T. (2017). Some difficulties in understanding negative numbers faced by students: A qualitative study applied at secondary schools in Indonesia. *International Education Studies*, 10(1), 24–38. doi:10.5539/ies.v10n1p24

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Hingham, Massachusetts: Kluwer.

Ghassemzadeh, H. (2005). Vygotsky's mediational psychology: A new conceptualization of culture, signification and metaphor. *Language Sciences,* 27, 281–300. doi: 10.1016/j.langsci.2004.04.003

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillian.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Unpublished Ph.D. Dissertation, University of Gothenburg, Gothenburg, Sweden. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/305033448_Making_Sense_of_Negative_Numbers on Oct 12, 2020.

Lakoff, G. & Johnson, M. (2003). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from.* New York: Basic Books.

Larsen, J. (2012). Epistemological obstacles of negative numbers. *Vector: The Official Journal of the BC Association of Mathematics Teachers*, 53(2), 56–60.

Leshem, S. & Markovits, Z. (2013). Mathematics and English, two languages: Teachers' views. *Journal of Education and Learning*, 2(1), 211-221. doi: 10.5539/jel.v2n1p211

Li, F. & Wang, L. (2013). The study of comparison between English language and mathematical language. *Journal of Studies in Social Sciences,* 4(2), 213-234.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26. doi: 10.4324/9780203403891-6

Usiskin, Z. (2015). What does it mean to understand some mathematics? In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 821-841). Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-17187-6_46

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics* 54, 9–35 . doi: 10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language* (E. Hanfmann & G. Vakar, Eds. and Trans.). Cambridge: MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes* (M. Cole, V. Jolm-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds.). Cambridge: Harvard University Press.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in `negativity´. *Learning and Instruction*, 14(5), 469-484. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.012

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, 21(4), 555-570. doi: 10.1080/09515080802285552

Whorf, B. L. (1956). *Language, thought, and reality: selected writings*. Cambridge: MIT Press.

Wible, D. (2005). *Language learning and language technology*. Taipei: Crane Publishing.