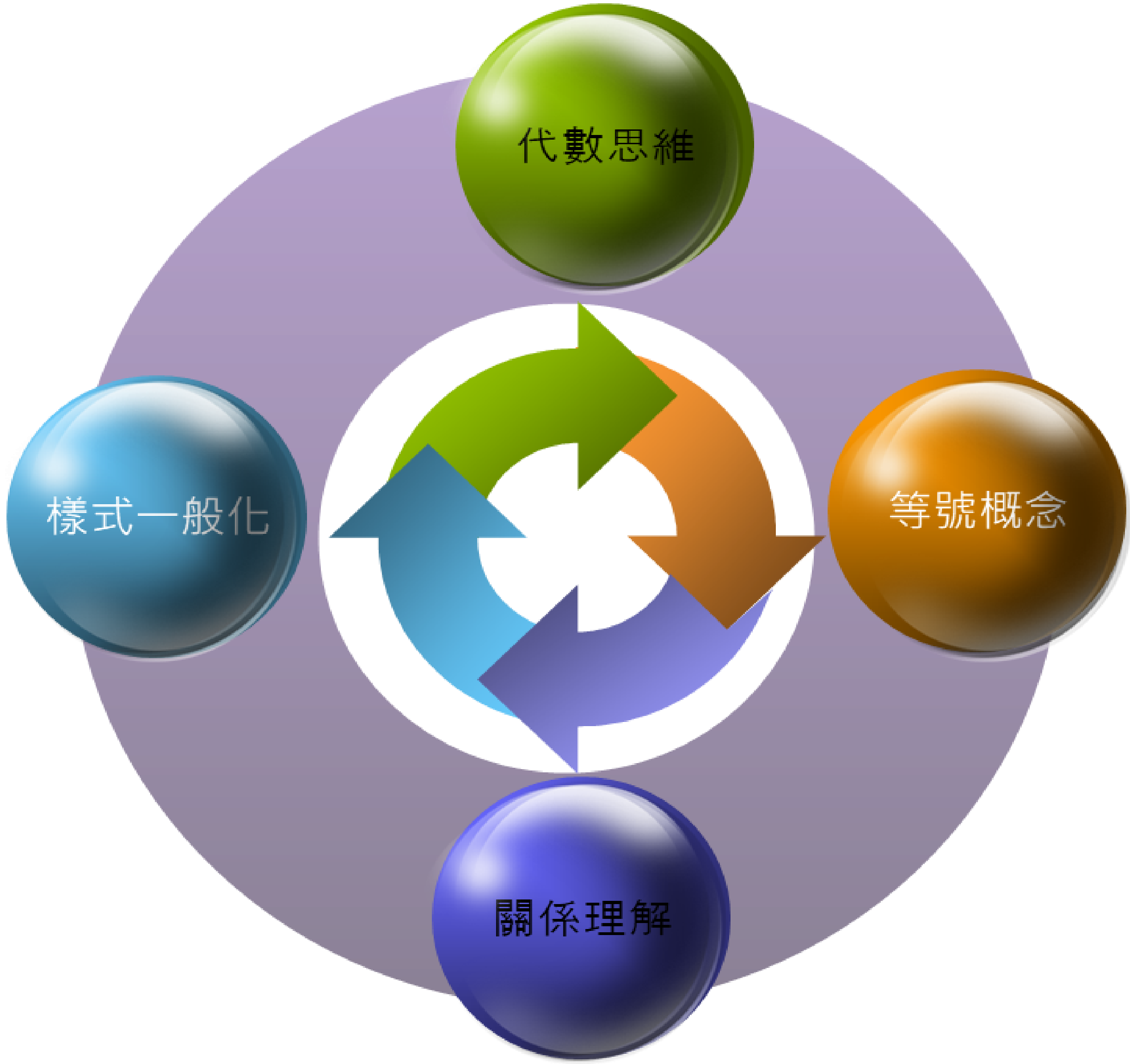
代數思維
在中小學數學教學之應用

國立台中教育大學
數學教育學系
陳嘉皇教授

講演的內容



數學教育的目的

- Mason(1996)認為數學教育的核心在於喚醒學童對於數學一般化本質的敏感性
- (at the heart of teaching mathematics is the awakening of pupil sensitivity to the nature of mathematical generalization)

早期代數化：研究和教學的前景

- Subramaniam 和 Banerjee，指出算術需要用“代數的眼”來看待，
- Blanton 和 Kaput (2008) 將這種現象稱為代數化，並將其描述為將小學教授的數學，向具有普遍性內在特徵的代數思維轉變和擴展，並在這種轉變中包括“建立課堂參與規範，使論證、猜想和辯護(argumentation, conjecture, and justification)成為日常的話語行為”。

早期代數化：研究和教學的前景

- “代數之眼”的發展涉及在算術中看到一般性，而論證、猜想和證明等更全面的數學推理過程是實現這一目標的途徑。
- Kieran (1996) 提出了學校代數活動由三個部分組成：一般性； 轉換的； 整體後設層次(the generational; the transformational; and the global meta-level)，包括分析數量之間的關係、注意結構、研究變化、歸納、解決問題、證明、證明和預測(includes analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, justifying, proving, and predicting)。

早期代數化：研究和教學的前景

- Kaput (2008)將代數推理的兩個核心方面指定為
- (i) 一般化和一般化在傳統符號系統中的表達，及
- (ii) 在有組織的符號系統中，句法指導對符號的操作。這些核心的每一個都被認為在以下代數分支中發現：
- 代數作為對算術和定量推理中出現的結構的研究，
- 代數作為函數的研究，和
- 代數作為建模語言的應用。

早期代數化：研究和教學的前景

- Radford強調，“代數思維不是關於是否使用符號，而是關於以特定方式進行推理。” 代數思維是種採用特定方式的推理，因此須將代數推理(algebraic reasoning)和代數思維(algebraic thinking)加以區別。
- 古典的數學的推理研究較聚焦於一般的例如演繹、歸納、發想或類比(deductive, inductive, abductive, or analogical)作為推理的形式。然而這些推理對於早期代數的詮釋太過狹隘，應該包含多種不同的方法，才可稱為代數思維。

何謂代數思維

- Kieran(1996)將它定義為：使用不同的表徵處理具關係的數量問題。
- Swafford與Langrall(2000)認為代數思維是種運算未知數的能力，
- Driscoll(1999)則說：代數思維可想成是種呈現數量狀態的能力，讓變數之間的關係變得明顯。

何謂代數思維

- 學童代數思維的發展需要特殊思考方法的發展，它是透過分析數量、明顯的結構、變化的研究、一般化、解題、模式化、證明、驗證與預測之間的關係形成的(Kieran, 2004)。
- 從算術轉化到代數對許多學童而言是困難的，即使是一些擁有相當算術能力的學童，因為這個轉化需要學童做許多的證明(陳嘉皇，2007，2008，2009；Kieran, 2004; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)。

何謂代數思維

- 代數思考的後設素和本質可以包含以下議題：
- 1 從特殊的角度思考一般(Thinking about the general in the particular)
- 2. 從規則的角度思考樣式(Thinking rule-wise about pattern)
- 3. 數量、數字和數值運算的相關思考(Thinking relationally about quantity, number, and numerical operations)
- 4. 問題情境關係的具象思考(Thinking representationally about the relations in problem situation)
- 5. 從概念上思考程序(Thinking conceptually about procedural)
- 6. 預測、推測和論證(Anticipating, conjecturing, and justifying)
- 7. 手勢、視覺化和語言表達(Gusturing, visualization, and languaging)。

何謂等號概念

- 研究發現，許多學生因對等號概念有不適切的理解，以致產生數學學習成就不佳的表現(Carpenter, Franke, & Levi, 2003; McNeil & Alibali, 2005a; Rittle-Johbson & Alibali, 1999)。這些研究指出，大多數的學生會將等號視為運算的工具，解釋成「發現總和」或「將答案放在一起」的概念，甚少解釋成具有數學等值關係的符號。

何謂等號概念

- 國小低年級的學童對等號意義的理解，需學習的內涵包含：
- 1.加減兩步驟問題的紀錄格式，
- 2. 得到答案的等號意義，
- 3.等值關係的等號意義，
- 4.等號的應用。

何謂等號概念

- 學童需能「從合成、分解的活動中，理解加減法的意義，使用＋、－、＝做作橫式記錄與直式記錄，並解決生活中的問題。」
- 能在「具體情境中，認識等號兩邊數量一樣多的意義。」因為當等號概念建立後，學童就能進一步「認識加法的交換律、結合律，並應用於簡化計算。」且能「在具體情境中，認識加、減互逆。」

何謂等號概念

- 當學童面對等號命題時，他們對等號概念產出的意義，可以分成五種典型的反應：
- 1.表示進一步的答案：以8＋4＝□＋5為例，學童認為□的值是12，亦即將等號表示是等號左邊物件計算所得之答案，等號是執行計算的指令，並未呈現等號兩邊數字的關係。
- 2.表示式子中所有數字的總和：例如8＋4＝□＋5，學童認為□的值是17，□表示需將等式中所有出現的數字加起來的意思。

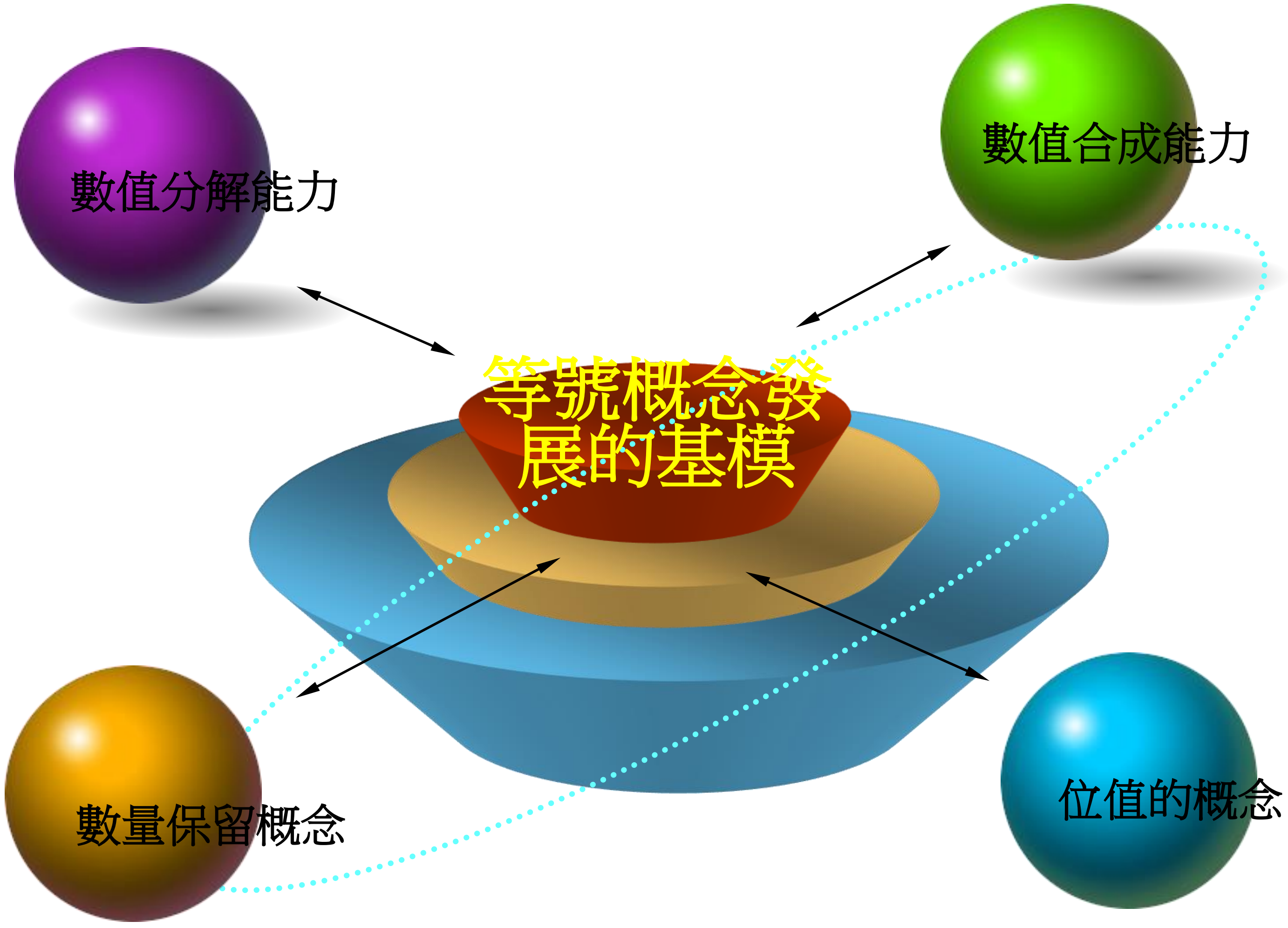
何謂等號概念

- 3.表示擴展問題的意義：例如8＋4＝□＋5，學童認為□的值是12，12還需再計算為8＋4＝12＋5＝17， 進一步將原來的問題8＋4解釋成12＋5＝17，將等號視為是進一步計算結果。
- 4.依照經驗認為等號即是代表等式兩邊數字計算的答案結果是一樣的。
- 5.認為等式兩邊的語法錯誤，左邊可以計算，右邊應該只是呈現答案而已。

何謂等號概念

- 設計等號問題時，需避免：
- 1.列出人或事物一些年齡或其他的數字特徵進行比較，例如小英等於（＝）7歲，大雄等於（＝）8歲，
- 2.採用集合體的方式指示物件的數目，例如六隻烏龜的圖像代表數字6，因為其他的特徵會誤導學童數量的辨識，
- 3.使用等值的方式呈現一系列的計算，例如20＋30＝50＋7＝57＋8＝65，
- 4.運用等值方式代表兩個圖像之間的關係，如4隻兔子的圖像等於另一圖像中的四隻兔子，其實兩圖像中的兔子特徵是不同的。

何謂等號概念



何謂等號概念

- 三種等號情境

3.雙邊同時運算
A＋B＝C＋D

2.單邊運算
例A＝B＋C或B＋C＝A

1.反身性
A＝A

何謂等號概念

等號概念情境類型	相 關 內 容
情境一： 反身性概念	1.等號兩邊相同之單一數量（數字） 1.1 0＝0 1.2 A＝A
情境二： 雙邊同時運算概念	1.等號雙邊數字（量）同時加法運算 1.1數字（量）一樣，位置交換，例A＋B＝B＋A 1.2數字（量）皆不同，例如A＋B＝C＋D 2.等號雙邊數字（量）同時減法運算，例A－B＝C－D 3.等號一邊數字（量）加法運算，另一邊數字（量）減法運算，例A＋B＝C－D，或C－D＝A＋B
情境三： 單邊運算概念	1.等號單邊數字（量）加法運算，例A＝B＋C或B＋C＝A 2.等號單邊數字（量）減法運算，例A＝B－C或B－C＝A

算術關係理解

- 運用算術律則(properties)執行計算作業，是學習代數符號操弄的基礎。算術律則的學習與代數之間的轉化有密切的關係，研究發現：在計算或操弄符號表現上較為優異的學童，他們會透過一般化及利用辨識概念和步驟之間的關係進行解題，因為能簡化計算，所以可花費較少的學習時間，而獲得較多的效益。

算術關係理解

- 學童在算術解題過程，若能將分配律與結合律一般化及驗證，那麼在正式代數的學習上會有較佳的表現。例如，能夠驗證$16\times8=10\times8+6\times8$，將能運用相似的推理解決代數問題，像是$16y=10y+6y$；能解決$23\times35=(20+3)\times(30+5)=(20\times30)+(20\times5)+(3\times30)+(3\times5)$，將可運用分配律的知識解決像$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$的代數問題。

算術關係理解

- 教育部課程綱要：數學學習領域》四年級之「代數」能力指標裡，強調學童要能在具體的情境，理解乘法的結合律。
- 在五年級則明列學童要能理解乘法對加法的分配律，並應用於簡化心算。希望藉由能力指標的宣示，培養國小學童相關律則概念，強化解題與正確計算的能力。

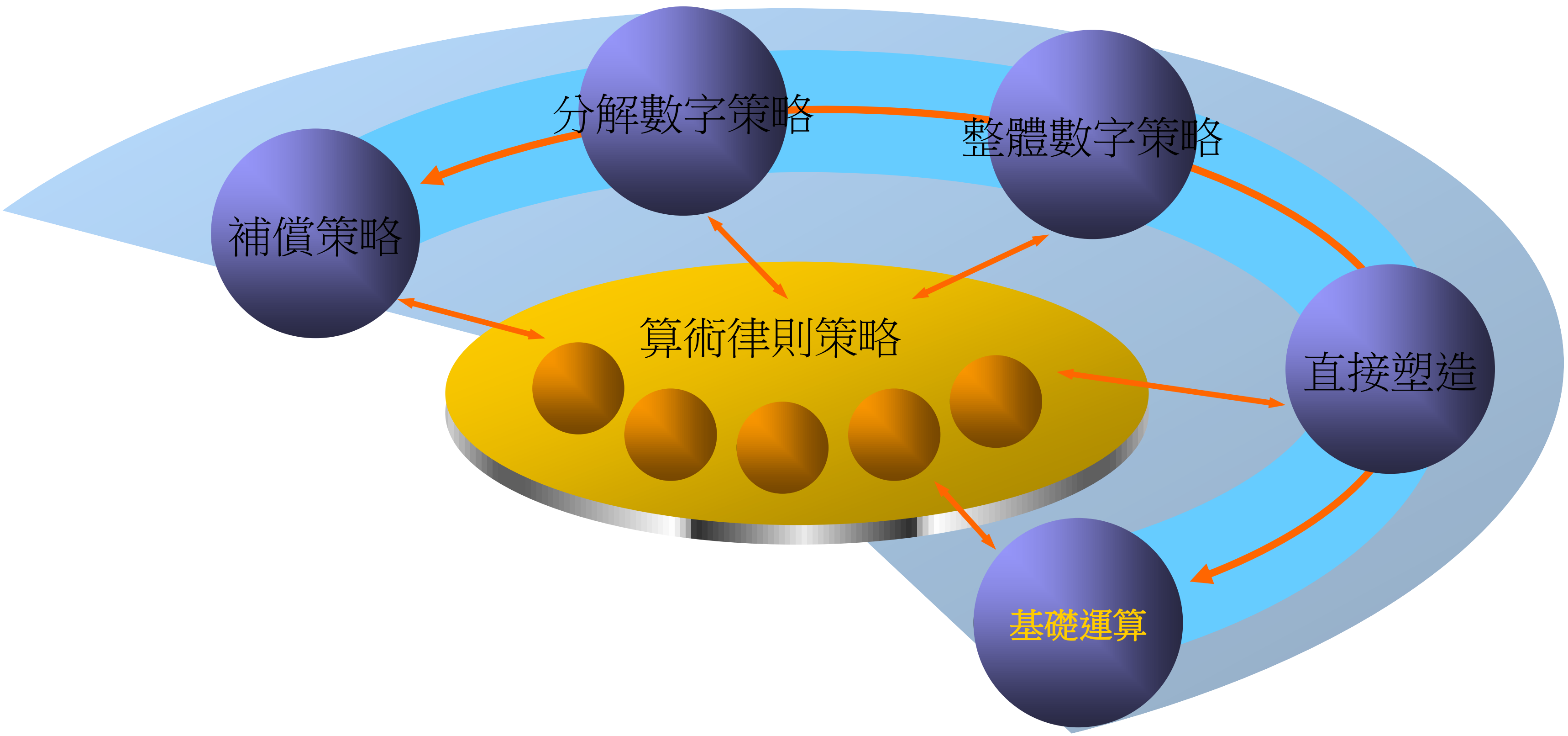
算術關係理解

- 研究指出學童乘法分配律與結合律的概念，最基本的是要能對問題中關聯的數字加以分解與合成，並理解等號兩邊數字運算代表等值的關係，當分解、合成與等值概念經過合理的證驗後，學童才可建立堅固的結合律與分配律概念 (Baek, 1998; 2008)。

算術關係理解

- 協助學童律則的運算，教師可以介紹實際生活中乘法的問題，鼓勵學童解釋和討論問題的狀態、解題的策略、及對使用策略的推理，其方法包含：
- （1）採用更代數化的方式呈現學童的策略，
- （2）提供學童可讓其等分解一個或兩個因子的問題，
- （3）呈現能夠檢驗分配律與結合律有關對或錯以及開放式的數學命題。

算術關係理解



算術關係理解

- 多位數乘法解題時，學童運用的算術律則策略可歸納：
- （1）「直接塑造」(direct modeling)：即學童使用具體操弄或畫圖來塑造每組的數字，例如以數子(counters)、10個為一組的積木計數物件的總數，一些學童需要透過計數所有的物件，才能塑造整個問題的情境並加以解決。直接塑造的策略又可分成兩種：由一個一個或十個一數的直接塑造策略。
- （2）「整體數字策略」(complete number strategies)：依據乘數的多少，將被乘數連續的加起來，學童會使用幾種策略，像是重複加法的運算，或是兩兩相加將所有的數字整體處理。例如13×5＝13＋13＋13＋13＋13＝26＋26＋13。

算術關係理解

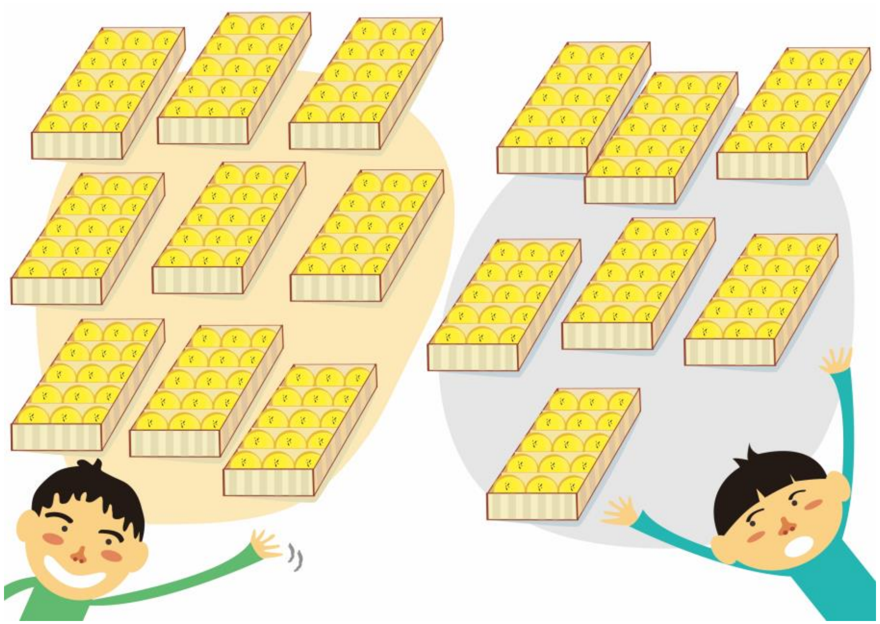
- （3）「分解數字策略」(partitioning number strategies)：將乘數、被乘數或兩者分解成較小的數字，以便讓他們能夠容易的進行乘法，學童會採用兩種方式來分解乘數和被乘數，一種是將單一數字分解成非十單位的數字，例如將15×177分解成（5×3）×177＝5×（3×177）；與將單一數字分解成十單位的數字，例如61×43可以等分解成61×（40＋3）＝（61×40）＋（61×3）。另一種則是同時將乘數與被乘數分解成以十單位的策略進行乘法的計算，例如26×39＝（20＋6）×（30＋9）＝（20×30）＋（20×9）＋（6×30）＋（6×9

算術關係理解

- （4）「補償策略」(compensating strategies)：學童對以特殊特徵為基礎的數字合成之特定問題，會進行數字的調整，有時候會同時調整乘數與被乘數，有時僅調整一種，若問題的數字有包含5時，調整的策略會將乘數或被乘數加倍或減半進行；若只進行乘數或被乘數其中一數的調整時，學童則會將它往上或往下調整以接近十單位的數字解題，例如17×70＝（20×70）－210。

算術關係理解

- 永芳餅店的每個月餅禮盒可以裝15個小月餅，哥哥買了9盒，弟弟買了7盒，永芳餅店總共賣出多少個月餅？（單元數分割）

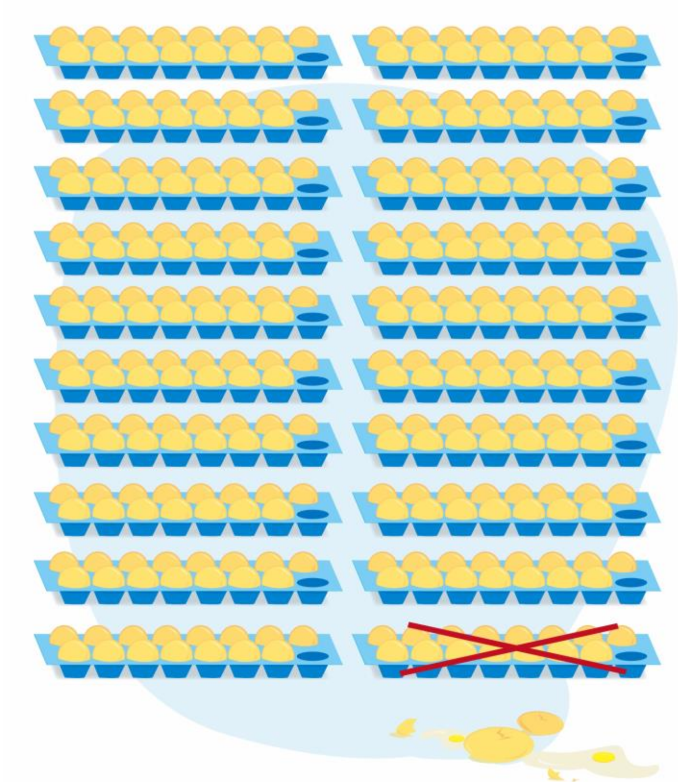


算術關係理解

- 15×16
- ＝（3×5）×16
- ＝15×（9＋7）
- ＝15×9＋15×7
- ＝（3×5）×（9＋7）

算術關係理解

- 塑膠盒每盒裝15個雞蛋，大東貨運行搬運20盒，途中不慎打破了1盒，請問完好的雞蛋還有幾個？

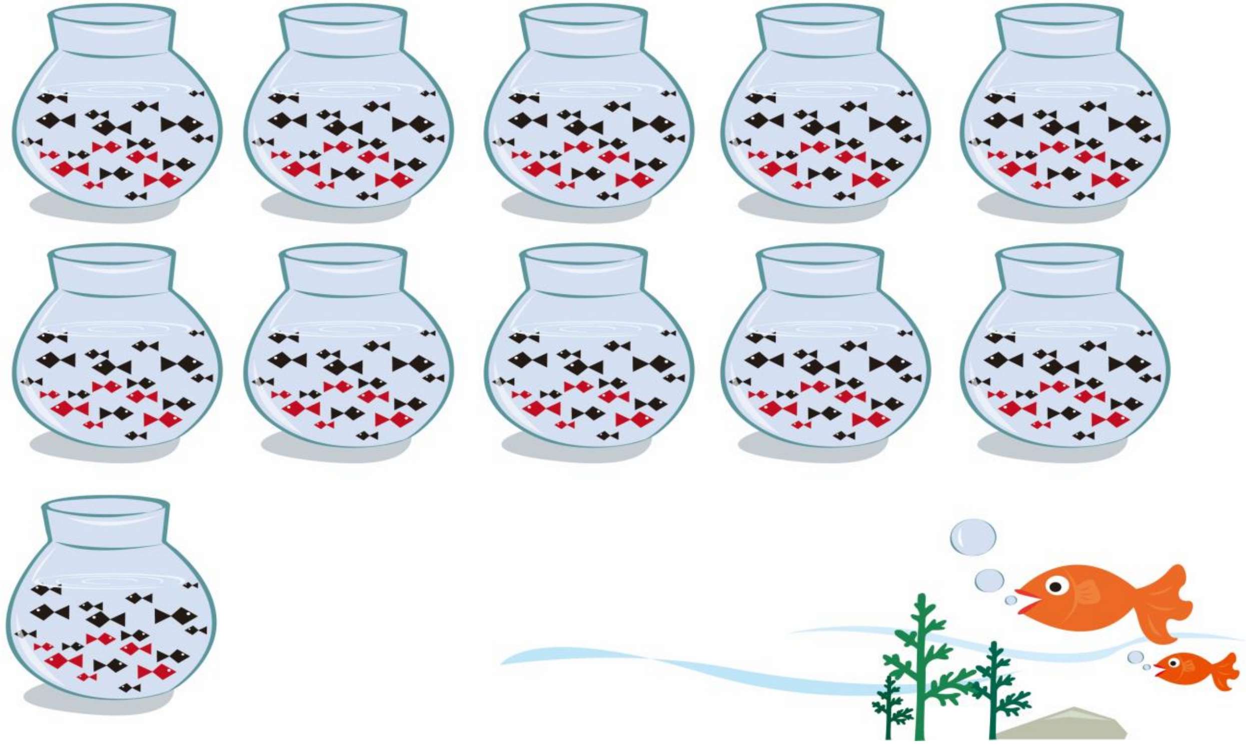


算術關係理解

- 15×19
- $= 15 \times (20 - 1)$
- $= 15 \times 20 - 15$
- $= 15 \times (10 + 9)$

算術關係理解

- 金魚缸裡面放了14條黑色金魚與6條紅色金魚，大樂賣場現在擺放了11個金魚缸，請問總共有幾條金魚？

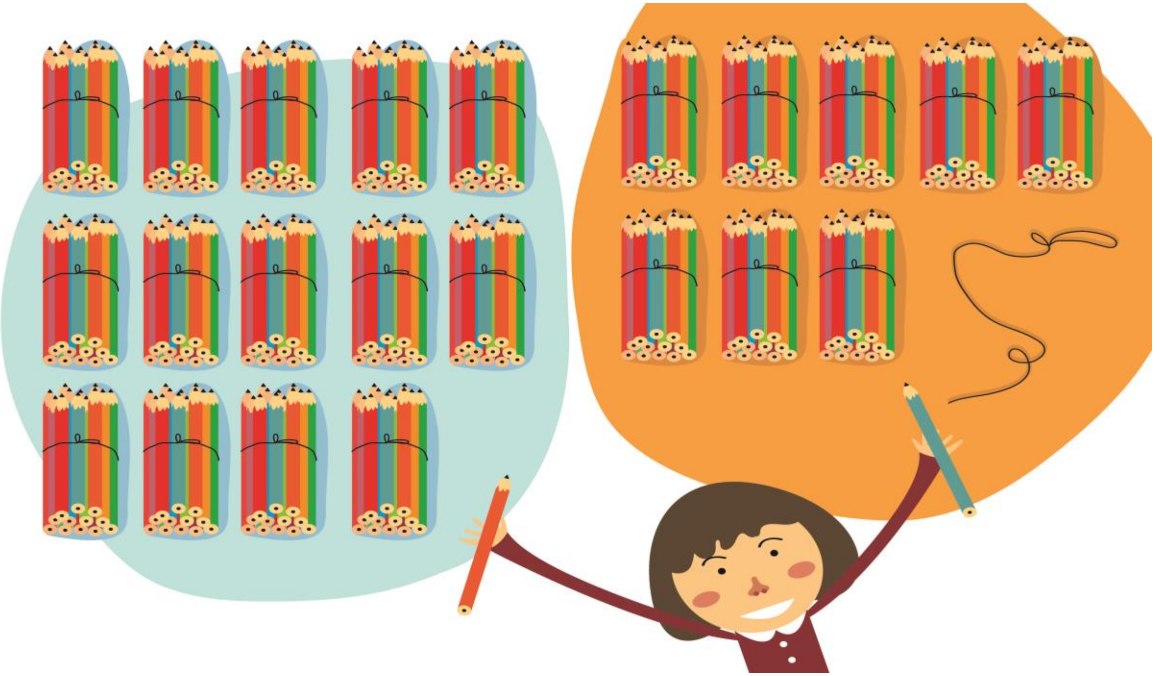


算術關係理解

- （14＋6）×11
- ＝20×（10＋1）
- ＝14×11＋6×11
- ＝20×11
- ＝（14＋6）×（10＋1）

算術關係理解

- 鉛筆一打有12枝，陳老師拿了14打，林老師拿了8打，請問總共有多少枝鉛筆？

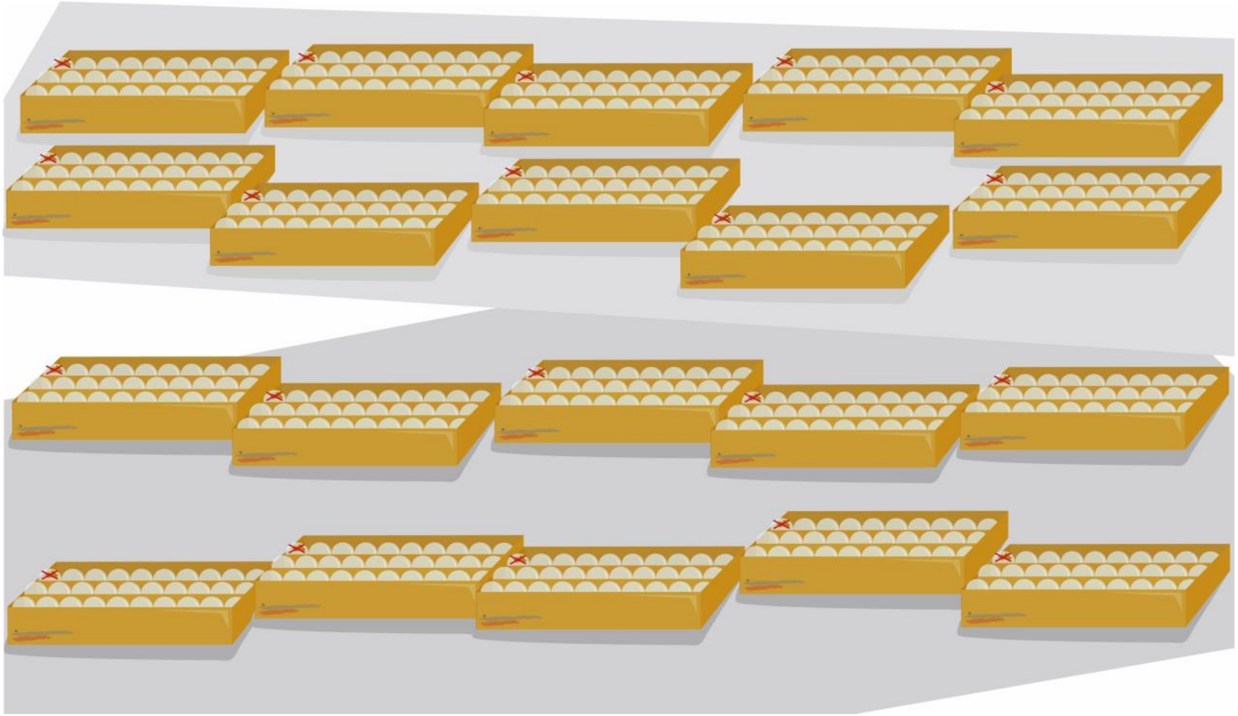


算術關係理解

- 12×22
- ＝（10＋2）×22
- ＝12×（14＋8）
- ＝12×14＋12×8
- ＝（10＋2）×（14＋8）

算術關係理解

- 大發燈泡行將生產的燈泡30個裝成一箱，總共裝了20箱，後來發現每箱都有1個是瑕疵不良的，請問良好的燈泡總共有幾個？

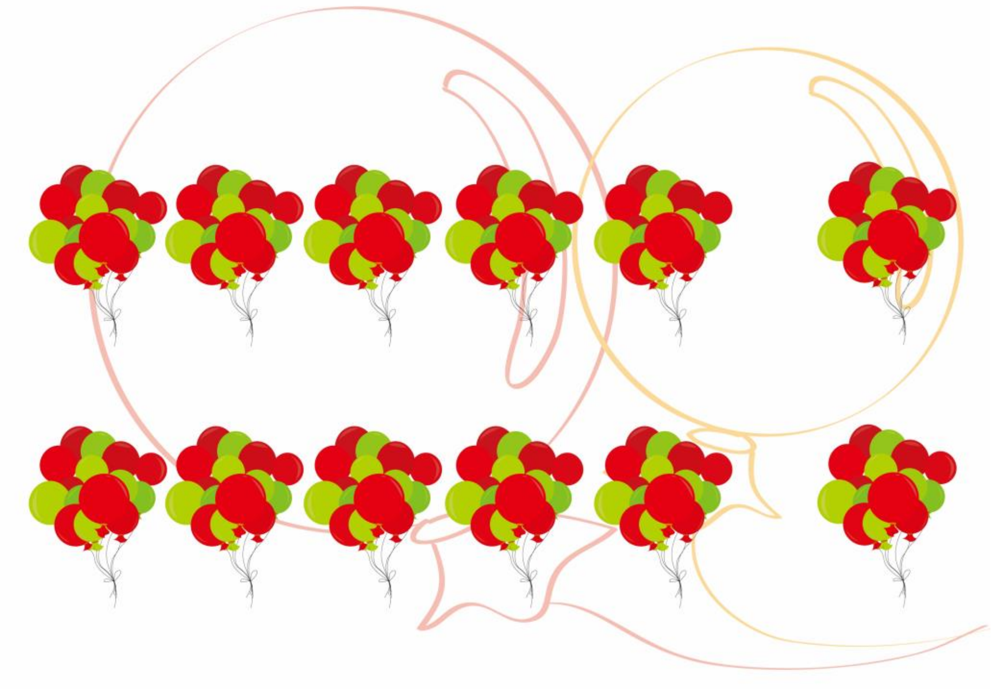


算術關係理解

- 29×20
- ＝（30－1）$\times 20$
- ＝（20＋9）$\times 20$
- ＝30×20－1×20

算術關係理解

- 同樂會要用氣球佈置會場，8個紅色的氣球和7個綠色氣球綁成1束，會場需用12束氣球，請問總共用了多少個氣球？（內容物分割）



算術關係理解

- $8 \times 12 + 7 \times 12$
- $= (8 + 7) \times 12$
- $= 15 \times 12$
- $= 15 \times (10 + 2)$
- $= (8 + 7) \times (10 + 2)$

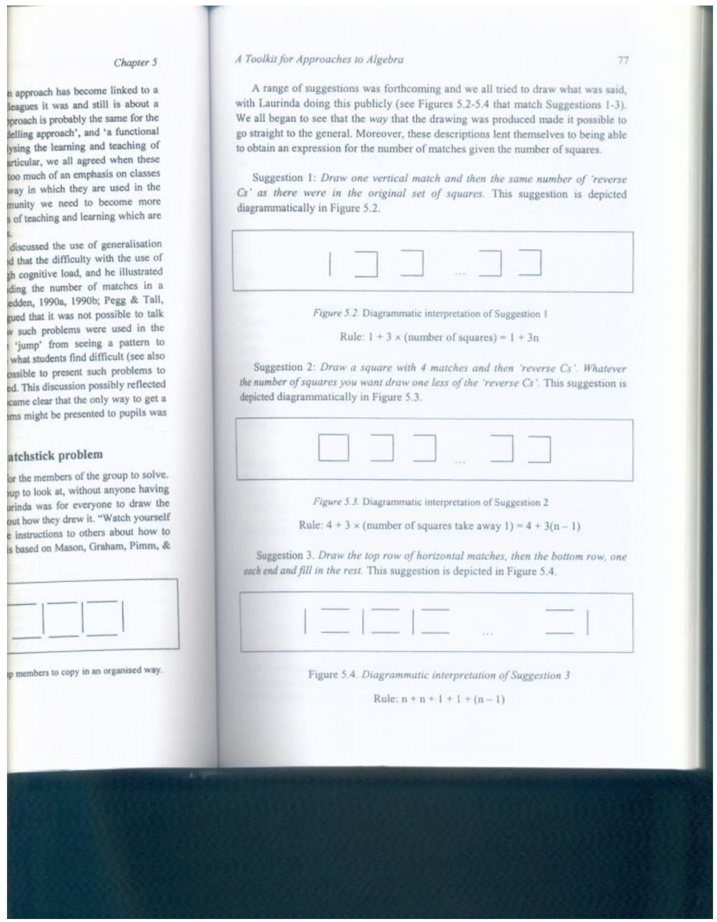
樣式一般化範例

範例

Figure 5.2. Diagrammatic interpretation of Suggestion 1

Rule: $1 + 3 \times$ (number of squares) $= 1 + 3n$

範例



Chapter 5

n approach has become linked to a
leagues it was and still is about a
proach is probably the same for the
delling approach', and 'a functional
lysing the learning and teaching of
articular, we all agreed when these
too much of an emphasis on classes
way in which they are used in the
munity we need to become more
s of teaching and learning which are
s.
discussed the use of generalisation
d that the difficulty with the use of
gh cognitive load, and he illustrated
ding the number of matches in a
edden, 1990a, 1990b; Pegg & Tall,
gued that it was not possible to talk
w such problems were used in the
'jump' from seeing a pattern to
what students find difficult (see also
ossible to present such problems to
ed. This discussion possibly reflected
came clear that the only way to get a
ms might be presented to pupils was

atchstick problem

or the members of the group to solve.
up to look at, without anyone having
urinda was for everyone to draw the
out how they drew it. "Watch yourself
e instructions to others about how to
is based on Mason, Graham, Pimm, &

p members to copy in an organised way.

A Toolkit for Approaches to Algebra 77

A range of suggestions was forthcoming and we all tried to draw what was said, with Laurinda doing this publicly (see Figures 5.2-5.4 that match Suggestions 1-3). We all began to see that the *way* that the drawing was produced made it possible to go straight to the general. Moreover, these descriptions lent themselves to being able to obtain an expression for the number of matches given the number of squares.

Suggestion 1: *Draw one vertical match and then the same number of 'reverse Cs' as there were in the original set of squares.* This suggestion is depicted diagrammatically in Figure 5.2.

Figure 5.2. Diagrammatic interpretation of Suggestion 1

Rule: $1 + 3 \times$ (number of squares) $= 1 + 3n$

Suggestion 2: *Draw a square with 4 matches and then 'reverse Cs'. Whatever the number of squares you want draw one less of the 'reverse Cs'.* This suggestion is depicted diagrammatically in Figure 5.3.

Figure 5.3. Diagrammatic interpretation of Suggestion 2

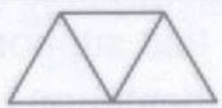
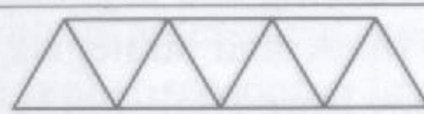
Rule: $4 + 3 \times$ (number of squares take away 1) $= 4 + 3(n - 1)$

Suggestion 3. *Draw the top row of horizontal matches, then the bottom row, one each end and fill in the rest.* This suggestion is depicted in Figure 5.4.

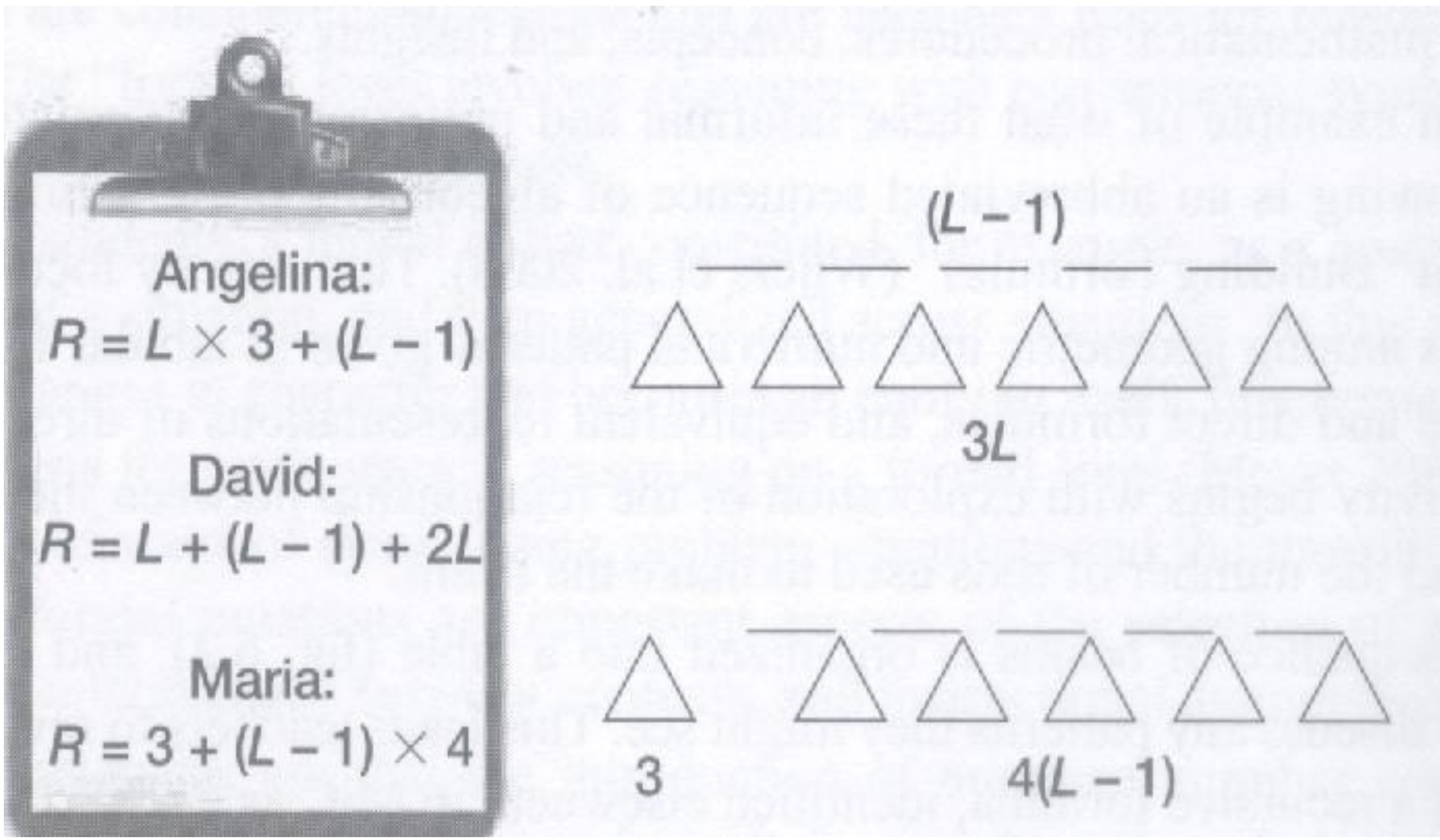
Figure 5.4. *Diagrammatic interpretation of Suggestion 3*

Rule: $n + n + 1 + 1 + (n - 1)$

範例

	Length of Beam (L)	Number of Rods (R)
	1	3
	2	
	3	
	4	

代數思維範例



Angelina:
$R = L \times 3 + (L - 1)$
David:
$R = L + (L - 1) + 2L$
Maria:
$R = 3 + (L - 1) \times 4$
$(L - 1)$
$3L$
3
$4(L - 1)$

需要的能力

- Kieran建議算術到代數之間要能成功的轉化需要五項能力：
- （1）將重點放在關係而非數字答案的計算，
- （2）重點放在運算以及他們的可逆關係，能夠處理與不能處理之間相關的概念上，
- （3）將重點同時放在問題的呈現與解題兩者，而非只想解決問題而已，
- （4）重點同時放在數字與字母兩者，而不是單獨的數字而已，
- （5）重點放在等號的意義上。

華人世界代數思維的重視

中國和新加坡的課程在低年級即安排了協助學童做證明所需發展代數思維的方法：

- 將等式解題與可逆運算作關聯。
- 在課程裡安排圖解的方法。
- 同時使用算術與代數的方法兩者進行解題。

小學代數思維安排的目的

（1）協助學童透過算術與代數兩者同時呈現，而對數量關係有更深入的理解，

（2）引導學童發現算術與代數方法之間的相似性與差異性，讓期能平順的從算術轉化到代數的思考，

（3）發展學童的思考技巧及彈性使用合適的方法解題。

動腦解題

- 某商人賣了15件衣服，總共收了1750元，其中有些衣服的單價是110元的，有些衣服的單價是130元的，請問這兩種衣服各賣了幾件？

代數思維教學的範例

- 現有100本故事書，分給甲、乙、丙三人，乙分到的故事書是甲的4倍，乙分到的書比甲多10本，試問甲分到幾本故事書？

代數思維教學的範例

- 問題1
- 陳老師買了12本筆記，15支鉛筆，要將它當成禮物送給同學，每位同學分得的鉛筆數要一樣多，筆記本數也一樣多，請問陳老師最多可以分給多少位同學?

代數思維教學的範例

- 問題2
- 達智國小裡，女學生的人數是男學生人數的5分之4，現在全校有學生630人，請問男女學生各有多少人?

代數思維解題所需能力

- 進行上述解題所需的能力包括
- 1.理解函數的意義
- 2.理解關係的意義
- 3.理解變數、未知數以及常數之間的差異
- 4.學習應用代數，亦即透過等式或不等式塑造問題
- 5.根據計算的規則操弄代數關係
- 6.學習應用代數計算

代數思維解題應用

- 使用代數思維的範例
- 2→15
- 1→ 8
- 0→3
- 4→ ？
- 想一想是怎樣的規則？你的答案是29，30，35

代數思維解題應用

	A	B
	A	B
$0 \to 3$	1×3	$4-1$
$1 \to 8$	2×4	$9-1$
$2 \to 15$	3×5	$16-1$
$3 \to 24$	4×6	$25-1$
$4 \to 35$	5×7	$36-1$
	$(x+1)(x+3)$	$(x+2)^2-1$

代數思維的活動

- Kieran(2004)綜合學校代數的活動可以分成三類
- （1）一般化活動(generational activity)，
- （2）轉換活動(transformational activity)，
- （3）整體／後設層次的活動(global/meta-level activity)。

一般化的活動

- 代數的一般化活動包含了代數物件有關表列式和等式的形成，特殊的範例包括
- （1）包含未知數之呈現數量問題情境的等式，
- （2）源自於幾何樣式或是數字順序的表列式，
- （3）掌握數字關係之規則的表列式，而強調表列式和等式的物件就是變數和未知數。
- 一般化活動的重點在於情境、特徵、樣式和關係的呈現，關於意義的產出，有兩項架構可用於教室裡的代數：一是函數的架構，另一是一般化的算術架構。

轉換活動

- 亦可稱為規則為主(rule-based)的活動，包括了項目的蒐集(collecting like terms)、因素分析(factoring)、擴展(expanding)、替代(substituting)、多項式的加乘、多項式的升冪、等式解題、簡化表列式、等值表列式與等式的作業。這些類型的一些活動特別關注於某表列式或等式為維持等值而改變其形式，最近的注意力則轉移到學生對等值觀念的發展與產生。

整體的／後設層次的活動

- 此活動中的代數大多視為是工具運用，包括解題、塑造模式、注意結構、研究變化、推想、分析關係、驗證、證明與預測，這些活動即使不用代數亦可進行。事實上，從課程的觀點來看，無法和其他代數的活動做區隔。

分析代數思維活動的套裝工具

- 代數的任何方法必需要考慮問題的領域、教學策略的選擇、信念、學習與教導的理論、學童本身的知識和經驗，Mason將這些面向一般化為四類：
- （1）問題的領域(problem domain)，
- （2）教學的取向(teaching approach)，
- （3）理論的觀點(theoretical perspective)，
- （4）學童的社群(community of students)。

一、問題領域

- 問題情境的焦點可給予不同代數觀點的途徑，像是未知數的操作、處理變數、一般化與塑造，以促使學童分析關於代數概念有關特別的問題，此層面緊密的關聯到所謂「內容」(content)的問題，重點大部分集中再將字母視為符號使用，包括將字母視為（1）未知數(unknown)，（2）一般化子(generaliser)，（3）變數(variable)，（4）將行動如物件呈現(representing actions as objects)。

二、教學取向

- 此重點在於選擇問題領域及相關的教學策略，
- 首先需學習教導與轉化個人的教學實務，
- 然後思考選擇與執行特殊的教學策略，
- 再者具體化不同的知覺習性、言說、理論與行動。

三、理論的觀點

- 此層面關於會影響教學策略與問題領域兩者選擇之有關教導與學習的理論和信念，需注意的是，每位教師皆有其主張的非正式理論。

四、學生的社群

- 此層面強調「學習者社群」在學習情境中的重要性，並考慮特殊社群學習代數的目的、受教育的階段、學童先備的經驗。