張僑平、黃毅英（2020）。
教學鋪排的合理性：以香港數學教科書中相似圖形課題為例。
臺灣數學教師，**41**（2），1-21
doi: 10.6610/TJMT.202010_41(2).0001

教學鋪排的合理性：以香港數學教科書中相似圖形課題為例

張僑平[1]　黃毅英[2]
[1]香港教育大學數學與資訊科技學系
[2]香港教育大學課程與教學學系

數學教科書的設計和內容鋪排對教師的教和學生的學均十分重要。除了學習目標、學習內容和相關的學習活動外，教科書所提供的可能的學習軌跡亦指出了如何帶領學生從一個知識點過渡到下一個知識點，這對於教師實施教學至關重要。這種學習軌跡的佈置並非一成不變的。本文以中學數學相似圖形這一課題為例，分析香港在不同時期的數學教科書中的內容編排，從中尋找該課題在教科書中佈置的歷史脈絡和變遷，並以此討論對於該課題合理的教學鋪排方式，也希望對其他數學課題的教學有所啟示。

關鍵詞：相似圖形、教學鋪排、數學教科書

通訊作者：張僑平，e-mail：zqiaoping@eduhk.hk
收稿：2020 年 4 月 30 日；接受刊登：2020 年 6 月 30 日。

壹、引言

無論教授哪門學科，教師的教學順序可謂各施各法，不一定嚴格按照知識結構上的安排。例如我們可以先由特例探討，漸漸推廣到通則；我們也可以遵循先行組織者（advance organizer）的想法（Ausubel，1968），先標示最一般的情況，讓學生有一個概觀，再慢慢投射到各種獨特情況（圖 1）。在數學學科，就其知識邏輯而言，當然先有定義、定理、證明，才到各種應用題的演練。但在教學上，因應不同學生群體，我們又有可能用不同例子顯示定理（法則）的合理性，之後讓學生練習一下，然後反過來再給予正式的證明。這些都涉及教學手法，不區一格。不過，我們總不能丟掉合理性，例如偷換概念（前後用的名詞相同但其實蘊含的概念、甚至定義其實不同），太多沒有論證的法則（如果艱深，可以暫時不給出嚴格證明，但應讓學生感受到在數學上──凡事應皆有其理由）或循環論證等都應避免。

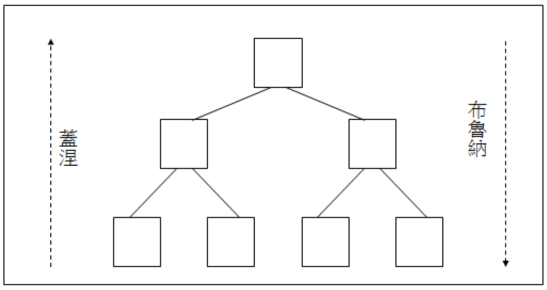


圖 1　行為主義（蓋涅 Gagné）與認知心理學（布魯納 Bruner，包括歐蘇伯 Ausubel 的學習進路（來源：Shulman，1973，頁 12）：各空框代表不同層次的學習任務

針對教學上的編排，初中階段的相似圖形是一個能提供有不少討論空間的課題。一方面，學生在小學階段的幾何學習以直觀認識幾何圖形為主，在生活當中對「相似」的物體已經有一些直觀的認識。初中的相似圖形課題的學習有助於協助學生從之前的直觀認識逐步過渡到正規的幾何證明；另一方面，相似圖形在幾何本身（特以《原本》而言）（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）起著其中一個關鍵性的作用。當中涉及的是三個互相扣連的板塊（圖 2）：

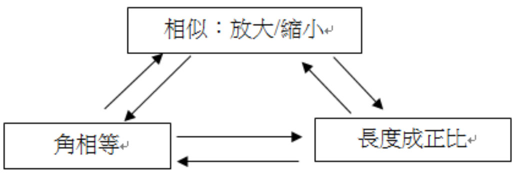


圖 2　相似課題中的三個板塊

如果集中討論三角形的相似，大多需要介紹角相等和邊成比例，當然之後還有一個「兩邊長成正比及夾角相等角相等」（本文簡稱「SAS」[1]）。我們面對的教學決定是：選擇哪個作為教學的出發點（定義）？哪些是定理？又怎樣推出這些定理？如果我們說不清楚，就會出現「相似」這觀念只是在學生學習的開端驚鴻一瞥地掠過，之後糊里糊塗地轉到所謂「三角形中之三個角相等」（本文簡稱「AAA」）及「邊成正比」（本文簡稱「SSS」[2]），然後又糊里糊塗地把這些法則轉移到三角形以外的形狀、甚至是立體圖形的相似上。

貳、 香港數學教科書的處理手法

我們曾綜合分析了自上個世紀 50 年代至今幾套有代表性的香港中學數學教科書中的相似形內容。它們涉及的內容範圍主要是介紹三角形相似的幾個判準（如 AAA、SSS、SAS），然後將這些結論運用到相似平面圖形、立體圖形的面積及體積比，以至應用到圖則比例、放大尺（pantograph）等。其中不少學習內容與《原本》（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）中的幾個命題（見附錄一）是一致的，詳細內容已展示於圖 3。至於各套教科書包括現行教科書的具體安排已在黃毅英（2017）於此不贅。本文主要選擇過往幾套使用過的教科書來分析相似性的教學處理手法（見表 1）。

表 1

本文所參考的教科書

使用年代	教科書[4]
舊數時期（1960 年代）	A *new geometry for schools*
新數學時期（1960-1980 年代）	*School Mathematics Project（SMP）for Hong Kong*
	《新數學》
普及教育時期（1980 年代-1990 年代中期）	*New curriculum mathematics*.
	Basic mathematics.
目標為本課程時期（1990 年代中期-千禧年）[3]	《達標數學》

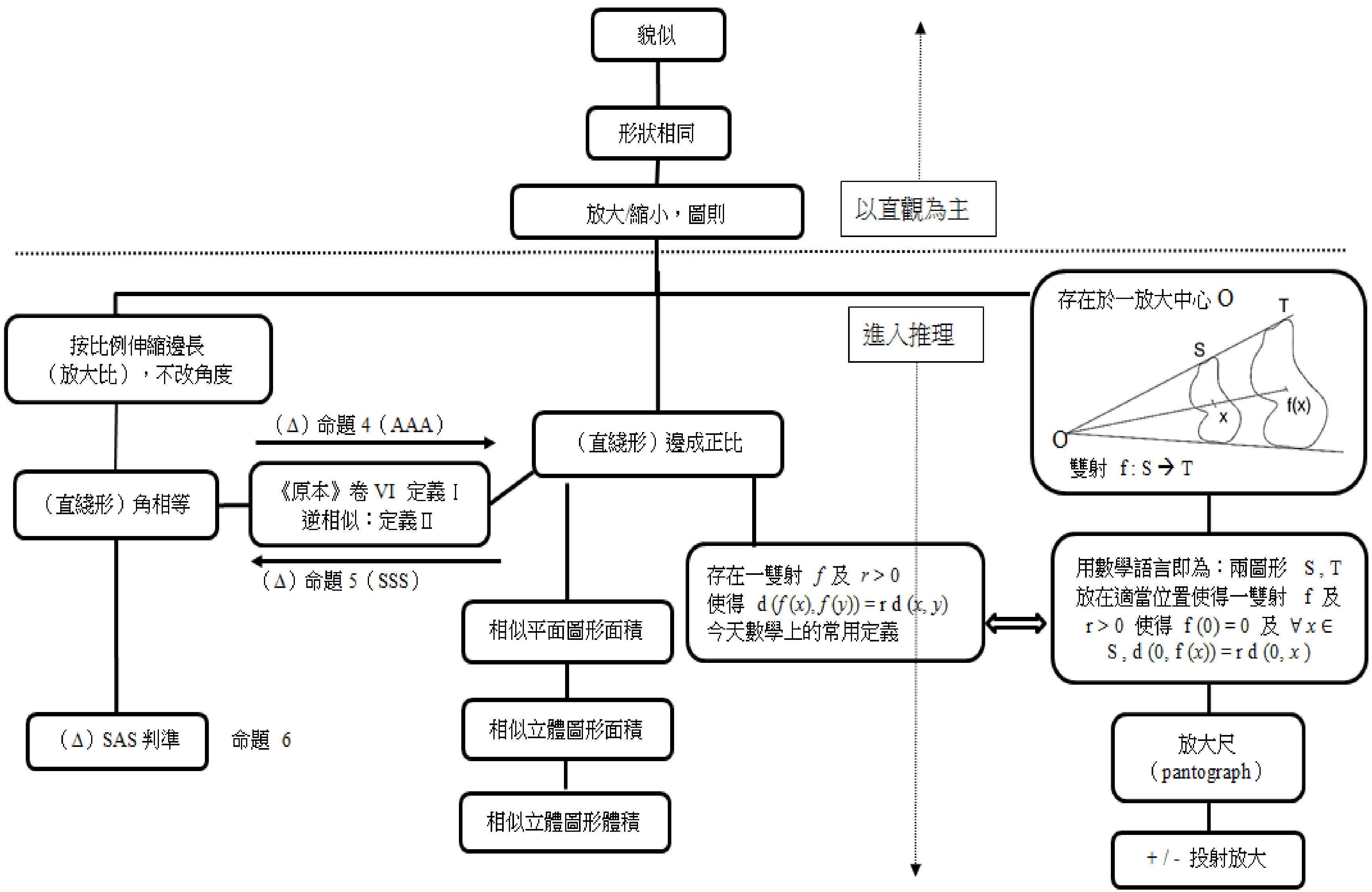


圖 3　教科書中的相似形課題的主要內容

一、「相似」理念的引入

要介紹「相似」的理念，我們不難想像，一般都會用「放大/縮小」作為引入。「放大/縮小」既直觀亦確切，而當中亦有不少有趣的手法。例如，新數學時期 Millo & Millo（1967）的教材首先討論一些「貌似」的概念，例如，黃色和棕色是不是相似的顏色？英文和中文是不是相似的語言？所有的同學是不是相似的大小？所有圓形是不是相似等等，再用一些圖形作討論（圖 4），從而慢慢帶出數學上「相似」的概念，指出數學上的相似就需要更嚴謹一些。然後，用一些問題檢驗相似圖形的對應角是否相等，再透過住宅的平面佈置圖（floor plans）包括放大比得到相似圖形的邊成比例，之後以一些聯繫鞏固所學的知識。當中並沒有證明各種相似條件，只是用一個例子驗證。最後介紹放大尺（pantograph）及 +/- 投射（- 是反向放射）。

在新數學時期，本地半群學社（1966）出版的《新數學》也是以直觀為主，不過局限於直線圖形。它根據課程安排分為兩冊（中一、中三）講授（有別於 Millo & Millo（1967）的在一冊中完成）。第一冊著重直觀幾何，從圖形的放大開始。跟 Millo & Millo（1967）及「舊數時期」的 Durell（1939）類似（圖 5），《新數學》也使用了不少的口頭討論，包括採用例子和非例子的對比。然後得到相似圖形（主要是直線圖形）的結論（亦即《原本》卷 VI 定義 I）（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）。接著介紹相似的圖形的圖則並輔以練習題。到第三冊，從之前的圖則開始，用特定的三角模樣（grid）作為例子去探討相似圖形的性質（見圖 6），如按比例伸縮邊長，不改變角度，能讓學生在一個特殊例子上看到一些東西（相似形的特徵）。接著將相似形應用到放大尺、尺規作圖、地圖和平面佈置圖，還有+/-投射放大，應用相似的內容比較多，其中都有一些習題用來鞏固，但也沒有涉及到證明。

3. 相似形狀

你很可能對於「相似」已有一些看法，讓我們看看是否有同樣想法，試試看一下的一些問題：

1) 黃色和褐色是相似的顏色嗎？
2) 橙色和紅色是相似的顏色嗎？
3) 英文和中文是相似的語言嗎？
4) 你班上所有的同學身形相似嗎？
5) 所有的圓形相似嗎？
6) 所有的三角形相似嗎？
7) 所有的等邊三角形相似嗎？
8) 所有的鉛筆相似嗎？

對上面的問題你是否有些同意有一些不同意呢？在繼續討論之前，我們必須確定我們對「相似」的理解是一致的。它在數學上有特別的意義。在日常生活中，「相似」一般指「差不多」，例如你對上面 2）的回答可能是「是的」。然而在數學上，「相似」有一個非常準確的含義。當我們說兩個物件是相似的，指的是它們如果有完全一樣的形狀。

可能這樣說我們還是不太清楚，比如什麼是「形狀一樣」呢？要看看究竟，讓我們探討以下哪些圖形的形狀一樣，並嘗試找一找這些形狀一樣的圖形之間有些什麼是不變的。

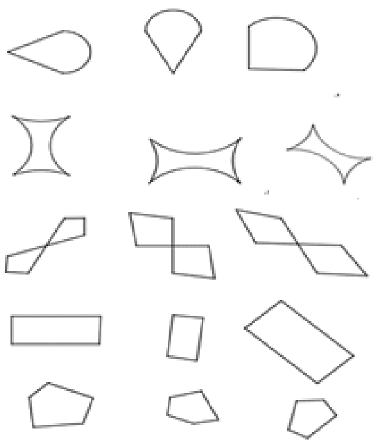
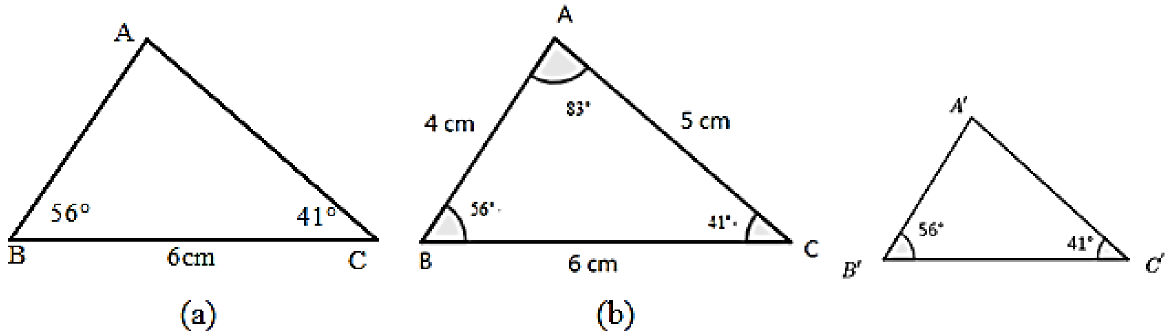


圖 4　透過口頭討論讓學生了解相似的觀念（來源：Millo & Millo，1967，頁 12，張僑平中譯）

把圖 (a) 準確的畫出，然後量度 ***AB*, *AC*** 及 $\angle A$ 的大小，你應該能得到圖(b)的結果。



口頭討論舉例：

畫出 $\Delta A'B'C'$ 使得 $\angle B' = \angle B = 56^\circ$，$\angle C' = \angle C = 41^\circ$，然而 $B'C' = 4.5cm$，量度 $A'B'$，$A'C'$ 並填充下面的式子：

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{4.5}{6} = \frac{0.75}{1};\ \frac{C'A'}{CA} = \frac{\cdots}{5} = \frac{\cdots}{1};\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{\cdots}{4} = \frac{\cdots}{1}.$$

刪除那些明顯錯誤的結果，將全班對於第二和第三個比例的答案平均出來，並和第一個比做比較，你留意到些什麼呢？

圖 5　透過口頭討論讓學生了解相似的觀念（來源：Millo & Millo，1967，頁 12，張僑平中譯）

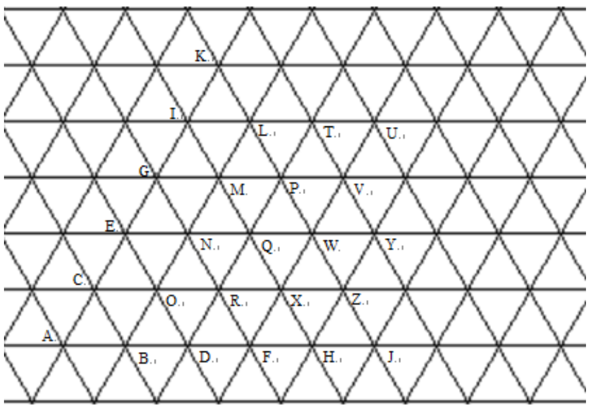


圖 6　三角模樣作為例子去探討相似（來源：半群學社，1966，頁 12）

普及教育時期 Parkin, Teng, & Wills（1977）的教材先由圖形錯覺出發，再用不少篇幅論述之所以證明是十分需要的，進而介紹推理系統，接著再引入形狀相同的觀念。同一時期，Leung, Chen, & Chan（1975）的 *Basic mathematics* 特別把全等和相似用下面方

式連繫起來：全等是形狀和大小相同（same shape, same size），相似只要求形狀相同（大小可相等可不相等）。無論舊數時期或後期的教科書都採用了包括口頭問答的探索法（圖 4-7）。及至「目標為本課程」時期，則有教科書《達標數學》（周偉文，2001）轉而利用了電腦軟體 World Draw 進行探討。

填充題　*如果其所有對應邊 _______ 及所有對應角____，那麼兩個直線圖形是相似的。*
如果兩個直線圖形 ______，那麼所有對應角相等及所有對應邊成正比。

練習 1　重寫以上句子，但將「相似」取代為「全等」。

練習 2　所有正方形是否「相似」？

練習 3　所有正方形是否「相似」？

練習 4　所有菱形是否「相似」？

練習 5　所有等腰三角形是否「相似」？

練習 6　所有等邊三角形是否「相似」？

練習 7　所有正 n 邊形是否「相似」？

圖 7　討論相似（來源：Leung, Chen, & Chan，1975，頁 3，張僑平中譯）

二、定義的範圍和選取

如上所述，大部分教科書在引入相似的直觀理念後均以「放大/縮小」作起點（如，Leung, Chen, & Chan（1975）用了放大鏡：圖 8）。故此，這理應成為正式的定義（圖 9）、作為教學的出發點。這個出發點的好處是，它容易套用到不同的平面圖形（包括非直線圖形甚至非封閉圖形）和立體圖形（圖 10）。不過，若以此作為定義，要進行往後的操作上並不容易。例如，若要驗證兩個圖形相似時，便要首先要找出放大中心（亦即光源：圖 11）。

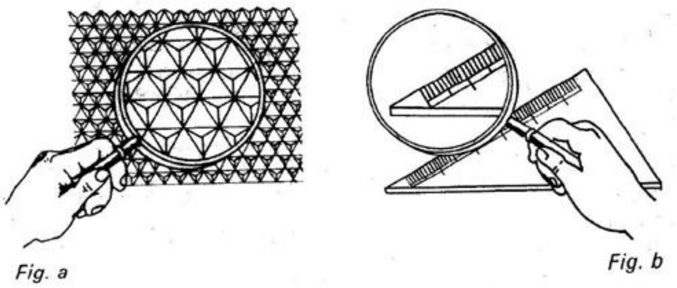


圖 8　圖形的放大/縮小（來源：Leung, Chen, & Chan，1975，第 3 冊，頁 1）

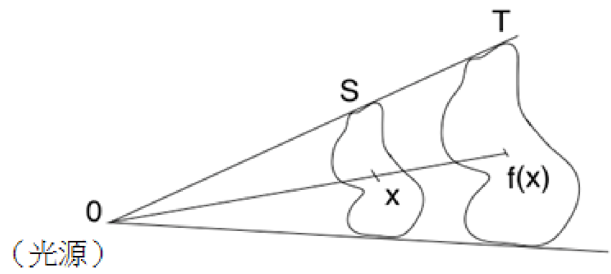


圖 9　正式定義的選取

圖 10　非直線相似圖形和相似立體

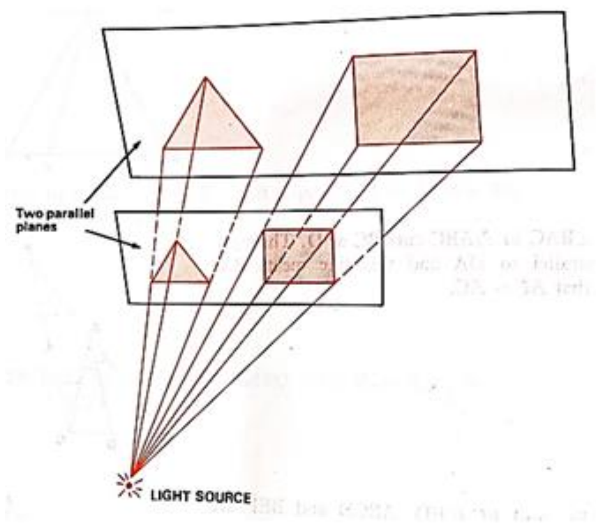


圖 11　利用光源放射定義相似（來源：Chen, Leung, & Wise，1988，第 3 冊，頁 86）

《原本》對相似之定義的處理比較「簡單」，它一開始（卷 VI 定義 1）給出相似直線形[5]的定義（凡直線形，若它們的角對應相等且夾等角的邊成比例，則稱它們是相似直線形），繼而很快就局限到三角形的相似（見附錄一命題 2）。當中另包含三個命題，

命題 4：AAA 判準，命題 5：SSS 判準，和命題 6：SAS 判準。《原本》是以「角相等及邊成正比」而非「放大/縮小」作出發點，這樣的處理有它獨特的歷史原因，於此不贅（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）。

在學校教學而言，如上所說，我們不排除先處理三角形的情況，慢慢推廣到其他形狀以及立體（就算《原本》也是由直線形出發）[6]。現時既然一般由「放大/縮小」出發，我們就有必要說明（縱非證明）何以四邊形或直線形的相似會需要有「角相等和邊成正比」二者缺一不可（這裏其實也包含著雙向互相推導的關係：「角相等和邊成正比」、「放大/縮小」)。再進一步，何以在三角形的情況下，兩者可選其一。此外與相似有關的證明，便是額外的 SAS 判準了。在圖 12，我們簡單描繪出了這幾個證明之間的關係以及教材需要處理的脈絡。

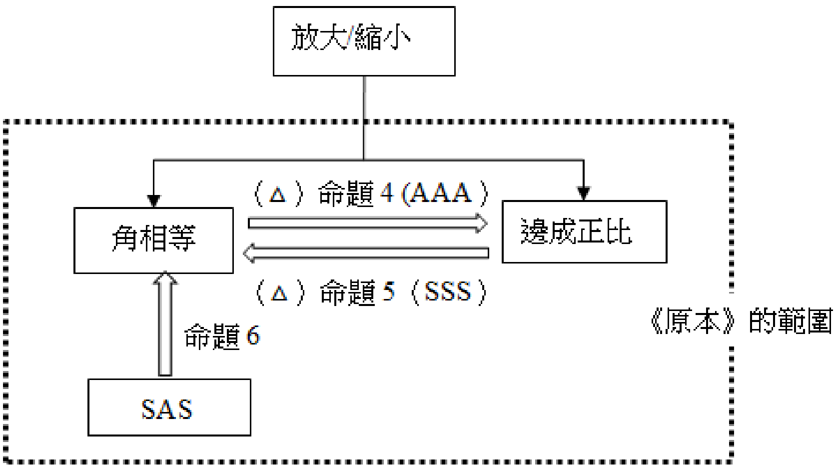


圖 12　中學需要處理的推演脈絡

三、證明的處理

在數學學習中，不是事事都可以給出一個容易理解的證明。舉一些「極端」的例子，譬如數字的分配律；兩條平行線及截線之內錯角、同位角、同旁內角等及逆命題；以至何以不同大小的圓，圓周和直徑都是同一個比。這些我們並沒有嚴謹地證明給學生看。一般我們會用大量實例去展現或用一些具代表性的情況去說明。在當前普及教育下的幾何學習中，重新引入論證成為一個不易解決的議題。有人便提出由實驗幾何確立（不是證明）一些基本命題，再由這些基本命題出發作嚴謹幾何推理及證明的想法（張家麟、黃毅英、林智中，2010），而不是一開始就嚴格地教授證明或者乾脆不證明。無論如何，有些命題不加證明可以理解，但總要有所說明（甚至說：「有數學家已幫我們證明了」

亦聊勝於無），盡量避免含糊其詞。對於行有餘力的學生，能提供證明鉤劃（所謂 idoof：idea of proof）就最理想不過了。那麼，對相似圖形來說，我們在教學上如何處理其中判準的證明呢？

首先，如上所述，我們無法迴避三角形以外的情況。無論如何，我們都會從「放大/縮小」出發，而非採用《原本》中的「角相等+邊成正比」作定義（卷 VI 定義 I 及定義 II）（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）。緊接著，我們有需要填補「放大/縮小」這一理念到「角相等+邊成正比」這個操作定義之間的「縫隙」。在當前的中學階段，我們恐怕難以展示嚴格的證明，而只能像不少教科書般用大量例子或探索活動說明。不過，我們總不能忽然間由「放大/縮小」轉而說相似形就是「角相等+邊成正比」。在附錄二（1）我們提供了其中證明的鉤劃給大家參考。之後，我們理應說明「角相等+邊成正比」兩者對於相似圖形來說是缺一不可的，這裡用一些簡單的反例就可以了（圖 13）。

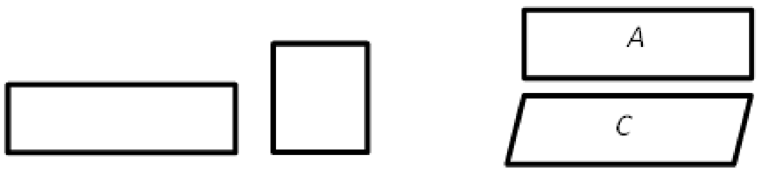


圖 13　左：角相等，邊不成正比；右：角不相等，邊成正比

但對於三角形的情況來說，「角相等+邊成正比」二者選其一即可。正如 Leung, Chen, & Chan（1975）在 *Basic mathematics* 相似形這一章中所說，這顯示了三角形的穩定性（stability）（頁 9）。其中的證明當然可在《原本》（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）中找到，但《原本》的圖不多，用文字描述不太容易理解。不過要找到正規的證明，無論從書籍或網絡，其實並不太難。現時的問題是如何找一個較易為學生理解但又不失原意的證明。其中一個的可行辦法是集中處理一個具體情況（特例）。

首先是「SSS=>AAA」。證明可以在 Leung, Chen, & Chan（1975）的 *Basic mathematics* 找到，證明中用到三角形中平行截線和兩條邊被截線段比例的關係以及構造全等三角形。我們把整個證明的大概流程放在附錄二（2）。

在 Leung 等（1975，第三冊，第八章第 3 節）*Basic mathematics* 的證明中，無論是「AAA => SSS」還是「SSS => AAA」，首先要證明「若一截線被一組平行線截成等距，任何另一條截線也會被該組平行線截成等距」（圖 14）（《原本》亦先要用命題 1 證明命題 2，方能進一步證得命題 3、4）（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）。黃毅英（2000）

以 3：5 的特例，把上述「引理」(其實這不只是引理，本身是一個重要結果，故引理加了引號。）嵌入了，形成單一的證明（附錄二（3))。不過我們必須留意，不能夠用截距定理來證明，否則陷入了循環論證(或用強命題來證明弱命題)的情況(詳見梁子傑、黃毅英、蕭文強，2008；張家麟、黃毅英、林智中，2010)。這便是為什麼上面要用了切割成細三角形的步驟，這種看似繁複的作法卻是必須的。附錄二(3)提供了「AAA => SSS」的證明鉤劃，附錄二（4）提供了「SSS => AAA」的證明鉤劃。

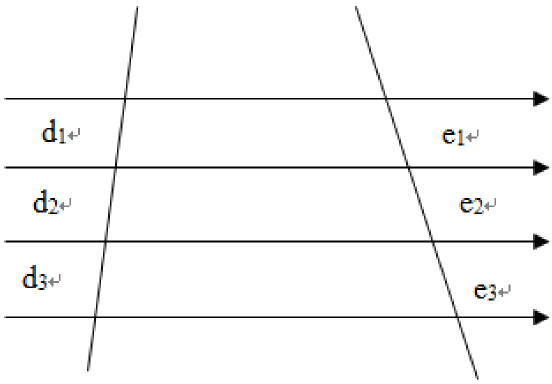


圖 14　若 d1=d2=d3，則 e1=e2=e3

我們亦留意到，早期 Durell(1939)教材中證明的佈置分兩冊進行。在第一冊(Stage A）中，先處理相似三角形（亦即《原本》卷 VI 定義 I ）。在第二冊（亦稱 Stage B)，則從比例與截線開始，從多邊形重新定義相似，又回到《原本》卷 VI 定義 I ，然後推出 SSS 的判準，再證明 SAS 的判準，然後介紹比與面積（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992)。

至於相似平面圖形的面積比和相似立體圖形的體積比(以至立體圖形的表面面積比)相關證明，從書籍或網絡也不難找到（例如《原本》卷 III 命題 19 和 20（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992)。值得一提的是，半群學社（1966）的教材用「$\frac{1}{2}\ ab\sin C$」公式來證明相似三角形的面積比，證明還相當嚴謹(第 3 冊下卷頁 102)。之後它再介紹一些立體，進而介紹相似三角錐體的表面面積。像《新數學》這樣用三角學去證明了平面幾何的做法，雖然與傳統的觀念不一致，但終究還是不錯的，起碼能夠證明給學生看，至少比什麼也不證明的情況要好

四、一般情況

究竟如何由「放大/縮小」推出「角相等和邊成正比」呢？首先我們要探討一般情況下的相似定義。Coxeter & Greitzer（1967）提供的方法是：兩個圖形若按比例伸縮邊長，不改角度，就叫做相似了。他們的定義不只局限於三角形。現時數學常用的關於相似（或稱為相似變換）之定義是：在歐式空間（Euclidean space）中，如果有一個雙射（bijective mapping）f 及 $r > 0$，使得 $d(f(x), f(y)) = r\,d(x, y)$（即兩點之間的距離按比例地伸縮）而且 r 大於 0，那它們就是相似了。這個定義亦省卻了我們前面提到的「放大點」，也就是說不用「找光源」。對於不處於同一平面的平面圖形也可以討論相似（見圖 15）。而由成正比例的（所有）相應長度且不只邊長，容易證得角能保持。

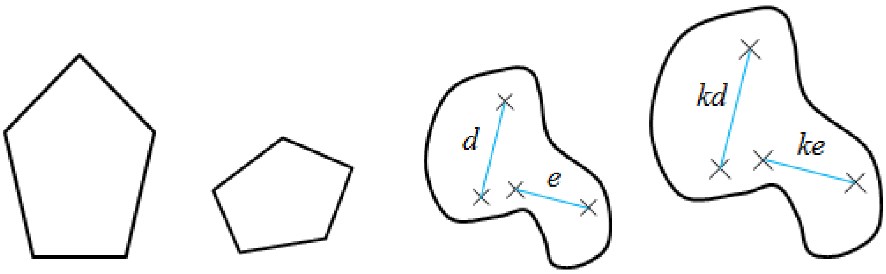


圖 15　一般圖形的相似

參、結語

從本文一開始，我們便提出，教學進路雖然不一定要嚴格依照學科知識結構鋪排，但總不能欠缺邏輯性。相似圖形的情況便突出了這個問題。因為在國中大部分的課題較為著重運算，而相似形這個課題的概念性較強。從探討歷史文獻（如《原本》（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）及 Coxeter & Greitzer（1967）的文章等）中，首先我們要決定清楚我們的討論範圍是一般情況下的相似物體還是只是平面圖形？是直線形還是三角形？選定了出發點（如三角形）之後，我們又如何在後面的討論中把相關的定義及定理合理地（而不是含糊地）推廣到其他圖形上？其次，當然是定義的選取。這和上面所說的討論範圍息息相關。因為如果我們以直線形而非三角形作出發點，在定義相似中，SSS 和 AAA 就要同時具備。

另外，我們也能從以往教科書中汲取不少有用的教學手法，如利用口頭討論、動手探索等引入相似的理念，以及如何一步一步有邏輯地得出相關的判準和性質。有了這樣清晰的鋪排思路，像圖 2 般，由其中一項作為教學的出發點就清清楚楚了，更可再推出

其他定理。這也涉及在國中這個階段我們如何處理數學證明。

證明是幾何、也是數學的核心。從上面的分析看到，縱使在新數學時期（當時「打倒歐家店」成為一個口號——即在學校裏取消教授歐式幾何[7]），教科書還是重視相似形中的幾何證明和推理。Parkin, Teng, & Wills（1977）更用了一個獨立的篇幅討論幾何推理（半群學社（1966）《新數學》第三冊亦有「演繹推理法」一節）。足見幾何證明以往一直都受到教科書的重視，只是不依照《原本》（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）的方式由公理出發吧！反而普及教育之後，可能是為了遷就考生水平，香港早期的中學會考中[8]及一般教科書的幾何題（不是指坐標幾何）多採用「帶有理由的計算推演」一類題目，而且往往局限於特例（見圖 16）。考生在計算未知數（圖 16 特例便是角 C）的過程中要每步提供理由，聊勝於無。直到 1992 年，香港在公開考試中恢復考核幾何證明題，演繹證明又再次受到重視。伴隨千禧年課程改革大氣候的改變（黃毅英、韓繼偉、李秉彝，2005），除了傳授學科知識，課堂教學課亦賦予了更多的要求，如要重視學生探究，強調電子學習的作用，以及關注學生情意的發展等等。現時的幾何教學已不太可能像過往那樣講授嚴謹的證明和重視演繹推理，但我們也有理由相信，數學證明以及數學證明的精神（spirit）對學生的數學學習和思維發展是有幫助（Wu, 1996）。

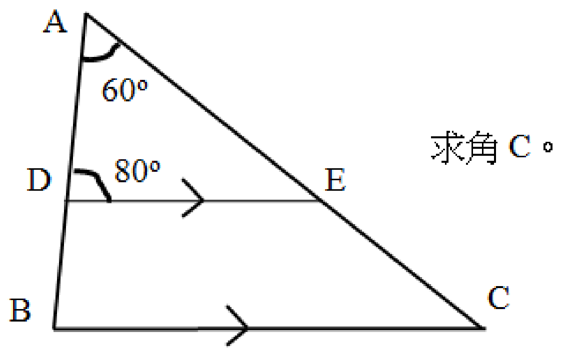


圖 16　典型「帶有理由的計算推演」題目

要重新引入嚴謹的幾何證明還要很多思考。「鄰區公理系統」是一個想法（詳見張家麟、黃毅英、林智中，2010）。退一步講，教科書哪怕真的完全沒有涉及證明，作為專業教師，我們是否可以給學生介紹呢？這就涉及到教師使用和轉化教科書的能力。如果習慣了跟隨教科書，完全依賴它進行教學，教師最終將會被去技能化，喪失因應學生需要對課程進行之設計和調適能力（黃毅英，2016）。無論如何，我們總希望在數學課堂內的教學，任何事情都得有個理由。

誌謝

感謝香港教育大學數學與資訊科技學系計畫（MIT/DCTF/T2/18-19）的經費補助。

附註

1. 「SAS」一般指兩邊長及夾角相等的全等三角形之判準。
2. 「SSS」一般指三邊相等的全等三角形之判準。
3. 之後的教科書改變不大。
4. 涉及的冊數基本上是在中三（即國中三年級）教授，但香港在新數學時期推崇螺旋式課程，故此教學會橫跨幾個學年，但均在中三把相關課題授完。
5. 按《原本》卷 I，「直線形」是由直線圍成的，三邊形是由三條直線圍成的，四邊形是由四條直線圍成的，多邊形是由四條以上的直線圍成的（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）。
6. Leung, Chen, & Chan（1975）的 *Basic mathematics* 從一般圖形的「放大/縮小」引入相似，集中討論三角形的情況再推廣到四邊形等直線圖形。不過這是說討論的流程，定義還是描述一般情況，而不是先定義三角形的相似、再把定義推廣到其他圖形。
7. 語出法國數學家 J. Dieudonné : "A bas Euclide!"
8. 2009 年香港中學實行 6334 新學制（張僑平，2020），2012 年香港實施唯一的香港中學文憑考試。在這之前，香港中學公開考試分兩次，中五的中學會考和中七的高級程度會考。

參考文獻

半群學社（1966）。**新數學**。香港：聯合書院出版社。

周偉文（2001）。**達標數學**。香港：文達出版有限公司。

梁子傑、黃毅英、蕭文強（2008）。課程設計上的「古為今用」—— 以「截距定理」和「中點定理」為例。**數學教育 26 期**，3-10。

張家麟、黃毅英、林智中（2010）。學校幾何課程的重整**—**為何教和如何教演繹幾何？

數學傳播 34 卷第 3 期，13-33。

張僑平（2020，付印中）。新學制以來香港數學教育的發展和挑戰。**課程研究**。

黃毅英（2000）。「相似形的角和相似比」的教學構思。載張奠宙（編著）。**點評本數學素質教育教案精編**（頁 377-402）。北京：中國青年出版社。

黃毅英（2016）。香港數學教科書歷史剪影——數學教科書和我的故事。載於黃毅英（編著）。**教書？教人？育人？數學教科書論述**（頁 1-23）。香港：香港數學教育學會。

黃毅英（2017）。**半世紀以來香港中學數學教科書變遷與啟示：以相似圖形為例**。香港：「香港數學教育會議 －2017」發表論文。

黃毅英、韓繼偉、李秉彝（2005）。數學課程:趨向全球化還是趨向西方化。載范良火、黃毅英、蔡金法、李士錡（編著）。**華人如何學習數學**（頁 24-61）。南京：江蘇 教育出版社。

Euclid 著。藍紀正、朱恩寬譯（1992）。**歐幾里得・幾何原本**。臺北市：九章出版社。

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York, U.S.A.: Holt, Rinehart & Winston.

Chan, L. K. F., Leung, C. T., & Wise, S. R. (1988). *Mathematics for Hong Kong*. Hong Kong: Canotta Publishing Company.

Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry revisited*. Washington, D.C., U.S.A.: Mathematical Association of America.

Durell, C. V. (1939). *A new geometry for schools*. London: G. Bell & Sons, Ltd.

Leung, K. T., Chen, D. L. C., & Chan, C. L. (1975). *Basic mathematics*. Hong Kong: Longman Group (Far East) Ltd.

Millo, B. A., & Millo, C. A. (1967). *School mathematics project for Hong Kong*. Hong Kong: Eastern University Press.

Parkin, F., Teng, S. B., & Wills, G. (1977). *New curriculum mathematics for Hong Kong (revised edition)*. Hong Kong: Oxford University Press.

Shulman, L. S. (1973). Psychological controversies in the teaching of science and mathematics. In F. J. Crosswhite, J. L. Higgins, A. R. Osborne, & R. J. Shumway (Eds.), *Teaching mathematics: Psychological foundations*. Ohio: Charles A. Jones Publication

Co.

Wu, H. (1996). The role of Euclidean geometry in high school. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 221-237.

附錄一 《原本》中有關相似的部分命題

本文涉及《原本》中與相似有關的定義和命題：（Euclid 著，藍紀正、朱恩寬譯，1992）

定義 I ：凡直線形，若它們的角對應相等且夾等角的邊成比例，則稱它們是相似直線形。

定義 II ：在另個直線形中，夾角的兩邊有如下的比例關係，第一形的一邊比第二形的一邊如同第二形的一邊比第一形的一邊。則稱這兩個直線形為逆相似圖形。

命題 1. 等高的三角形或平行四邊形，它們彼此相比如同它們的底的比。

命題 2. 如果一條直線平行於三角形的一邊，則它截三角形的兩邊成比例線段；又，如果三角形的兩邊被截成比例線段。則截點的連線平行於三角形的另一邊。

命題 3. 如果二等分三角形的一個角，其分角線截底兩線段，則這兩線段的比如同三角形其他二邊之比；又，如果分底成兩線段的比如同三角形其他二邊的比，則由頂點到分點的連線平分三角形的頂角。

命題 4. 在兩個三角形中，如果各角對應相等，則夾等角的邊成比例，其中等角所對的邊是對應邊。

命題 5. 如果兩個三角形它們的邊成比例，則它們的角是相等的，即對應邊所對的角相等。

命題 6. 如果兩個三角形有一個的一個角等於另一個的一個角，且夾這兩角的邊成比例，則這兩個三角形是等角的，且這些等角是對應邊所對的角。

附錄二 相似形判準的幾個相關證明

(1) 兩個直線圖形，角相等及邊成正比，則此兩圖形相似。

用類似光源的想法構造出這樣的兩個圖形：

(i) 由五邊形 ABCDE 的 A 點出發[1]，延長 AC 至 R，使得 AR = 2AC；

(ii) 作 RS // CD，交 AD 延長線於 S；

(iii) 作 RQ // CB，交 AB 延長線於 Q；

(iv) 作 ST // DE，交 AE 延長線於 T；

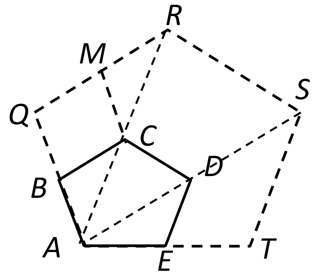
(v) 不難得到：AQ = 2AB，AS = 2AD，AT = 2AE；

(vi) $\angle$Q = $\angle$CBA，$\angle$QRS = $\angle$BCD，$\angle$RST = $\angle$CDE，$\angle$DEA = $\angle$T，$\angle$QAT = $\angle$BAE（對應角相等）；

(vii) 作 MC //QA 交 QR 於 M，有 CM = BQ = AB，$\angle$MCR = $\angle$BAC；

(viii) $\triangle$MCR $\cong$ $\triangle$BAC（SAS），故 MR = BC = QM，即 QR = 2BC；

同理有，RS = 2CD，ST = 2DE。因此，再結合(v) (vi)可知：兩個五邊形 ABCDE 和 AQRST 是相似的。逆命題從略。



(2)「SSS => AAA」的證明

Leung, Chen, & Chan（1975）的證明大概流程如下：

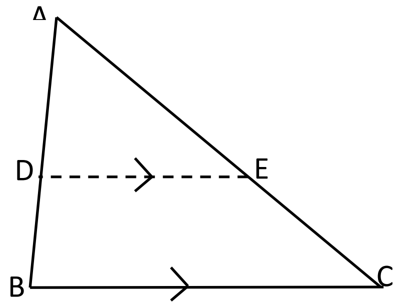
(i) 先利用成比例的截線段得到平行，即如果 AB 和 AC 被 DE、BC 所截，若有 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$，則可得 DE // BC[2]；

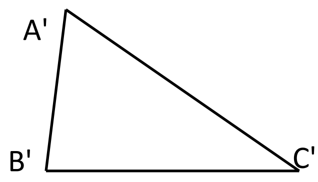
(ii) 由條件$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$，可在$\triangle$ABC 內構作 AD = A'B'，AE= A'C'，借助(i)，可知 DE // BC 且$\triangle$ABC $\backsim$$\triangle$ADE，進而$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$；

(iii) 由於 DE = BC$\cdot\frac{AD}{AB}$ = BC$\cdot\frac{A'B'}{AB}$，以及 B'C' = BC$\cdot\frac{A'B'}{AB}$（由條件可得），推導出 DE = B'C'；

(iv) 借助全等三角形 SSS 判準，得到$\triangle$ADE $\cong$ $\triangle$A'B'C'，及$\triangle$ABC$\backsim$$\triangle$A'B'C'；

(v) 因此不難得到，$\angle$A = $\angle$ A'，$\angle$B = $\angle$D = $\angle$B'，$\angle$C = $\angle$E = $\angle$C'，即 AAA。





---

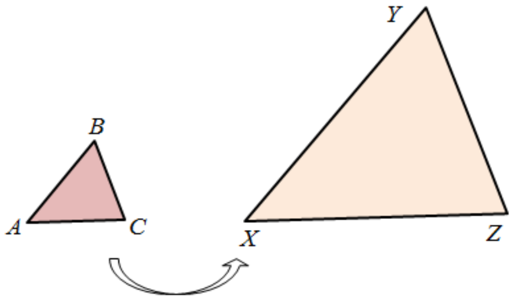
[1] 由五邊形形外一點（似一個光源點）任出發，也可類似構作。這裏為圖形簡單處理，選擇 A 點。

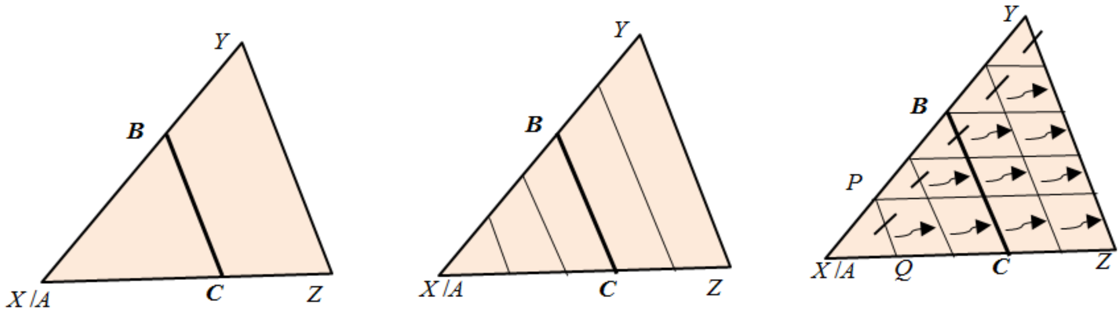
[2] 書中對這個結論的證明很有心思。先用面積法證明在 DE // BC 時，有 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$，然後用同一法證明逆命題也成立。

(3) 「AAA => SSS」(合併了平行線截距的證明)

考慮 △ABC 和 △XYZ，既然「對應角相等」，假設 A 對應 X，B 對應 Y，C 對應 Z。既然角 A 和角 X 相等，我們就可以把 △ABC 嵌入 △XYZ 內，使得角 A 和角 X 重疊。

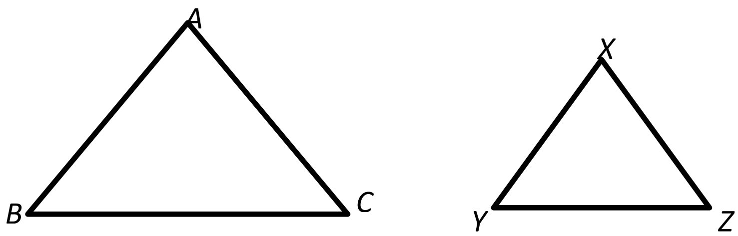
假設 AB：XY = 3：5 (其他比例的做法完全一樣，只是可能複雜點)。我們得出很多全等三角形及平行四邊形，於是逐步可得出各小邊長相等。於是 BC = 3PQ，YZ = 5PQ，即 BC：YZ = 3：5 同理，AC：AZ = 3：5。





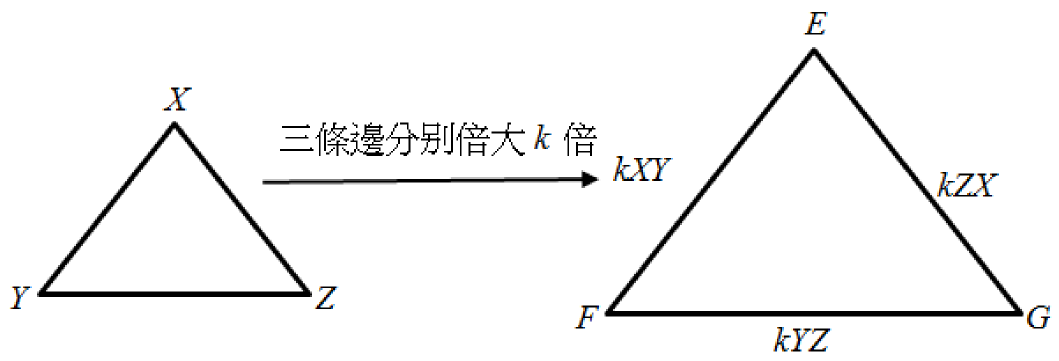
(4) 逆命題：「SSS => AAA」

考慮下列兩個三角形 △ABC 和 △XYZ。已知的對應邊成比例 $\frac{AB}{XY}=\frac{BC}{YZ}=\frac{CA}{ZX}$，要證明∠A = ∠X，∠B = ∠Y，∠C = ∠Z。

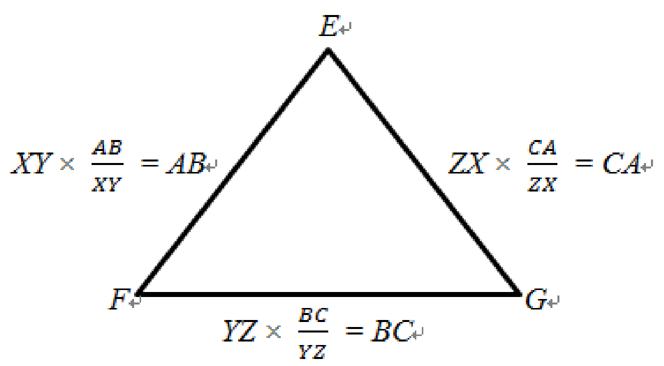


設 $\frac{AB}{XY}=\frac{BC}{YZ}=\frac{CA}{ZX}=k$

作三角形 △EFG 使它的三條邊分別是 △XYZ 的三條邊的 k 倍。



因為 $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX} = k$，我們可得



明顯地，△ABC ≅ △EFG　（SSS）

∴　∠ABC = ∠EFG

∠BCA = ∠FGE

∠CAB = ∠GEF　（≅△對應角）

即△ABC 與 △XYZ 的對應角相等。